

1 Division euclidienne

Exercice 1

Effectuez la *division euclidienne* de $A(x)$ par $B(x)$ (en précisant le *quotient* $Q(x)$ et le *reste* $R(x)$).

1. $A(x) = 30x^2 + 17x + 2;$
 $B(x) = 6x + 1$
2. $A(x) = 15x^3 + 36x^2 + 12x - 2;$
 $B(x) = 3x^2 + 6x + 1$
3. $A(x) = 21x^4 + 57x^3 + 43x^2 + 17x - 2;$
 $B(x) = 7x^2 + 5x + 2$
4. $A(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1;$
 $B(x) = 2x^2 - 3x + 1$
5. $A(x) = 8x^4 - 14x^3 + 5x^2 - 8x - 3;$
 $B(x) = 4x^2 - x + 3$
6. $A(x) = 18x^4 - 45x^3 + 34x^2 + 5x - 20;$
 $B(x) = 6x^2 - 5x - 5$
7. $A(x) = 28x^5 - 29x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 17x + 7;$
 $B(x) = 4x^2 - 3x + 2$
8. $A(x) = 21x^7 - 28x^6 + x^5 + \frac{27}{2}x^4 + 7x^3 + 4x^2 - \frac{15}{2}x + 9;$
 $B(x) = 7x^3 - 2x + 3$
9. $A(x) = 16x^7 - 40x^3 + 17x^2 + 10x + 1;$
 $B(x) = 4x^3 - 5x - 1$

2 Racines d'un polynôme

Exercice 2

Déterminez *si* le nombre α est *racine* du polynôme P .

| | $P(x)$ | α | $P(\alpha)$ |
|----|-------------------------|------------------------|-------------|
| 1° | $4x^3 + 2x^2 - 3x + 18$ | -2 | |
| 2° | $2x^2 - x - 6$ | $-\frac{3}{2}$ | |
| 3° | $x^2 - 2x - 1$ | $1 + \sqrt{2}$ | |
| 4° | $4x^2 - 4x - 1$ | $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ | |

Exercice 3

Quels sont les *zéros* (les *racines*) des polynômes suivants?

1. $(x + 2) \cdot (x - 2)$
2. $9x^2 - 16$
3. $(x + \sqrt{3})^2$
4. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$
5. $x^2 + x - 6$
6. $(x^2 + x - 6)(2x - 1)$
7. $x^2 - 4x - 5$
8. $x^2 - x - 6$
9. $x^2 - 3x + 2$
10. $2x^2 + 3x - 2$

3 Loi du reste — Le schéma de Horner

Exercice 4

Évaluez $P(\alpha)$ à l'aide du *schéma de Horner* :

| | $P(x)$ | α | $P(\alpha)$ |
|----|--------------------------|----------------|-------------|
| 1° | $x^3 - x^2 + 2x - 6$ | 3 | |
| 2° | $x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ | -2 | |
| 3° | $2x^3 - x + \frac{1}{2}$ | 1 | |
| 4° | $x^3 + 4x^2 - 4x + 5$ | -1 | |
| 5° | $2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ | $-\frac{1}{2}$ | |

Exercice 5

Étudiez si le polynôme $A(x)$ est *divisible* par le binôme $B(x)$ (en appliquant la *loi du reste*) :

| | $A(x)$ | $B(x)$ | divisible? |
|----|------------------------|---------|------------|
| 1° | $x^2 - x - 6$ | $x - 3$ | |
| 2° | $x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ | $x + 2$ | |
| 3° | $2x^3 - x + 2$ | $x - 1$ | |
| 4° | $x^3 + 4x^2 - 4x + 5$ | $x + 5$ | |
| 5° | $2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ | $x + 3$ | |

Exercice 6

Effectuez la *division* de P par Q à l'aide de la *grille de Horner*.

| | $P(x)$ | $Q(x)$ |
|----|-------------------------|---------|
| 1° | $x^4 - 3x^2 + 5x - 3$ | $x - 1$ |
| 2° | $3x^3 - 8x + 5$ | $x - 1$ |
| 3° | $2x^3 - 4x^2 + 5x - 10$ | $x - 2$ |
| 4° | $2x^3 - 4x^2 + 5x - 10$ | $x + 2$ |

Exercice 7

Déterminez les racines des polynômes suivants.

1. $3x^3 - 11x^2 + 9x - 1$
2. $2x^5 - 7x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 6x$
3. $x^3 - 3x^2 - 9x + 2$
4. $7x^3 + 6x^2 + x$
5. $-21x^4 - 5x^3 + 26x^2 + 5x - 5$
6. $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5$
7. $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 4$
8. $x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 12x - 9$
9. $8x^6 - 27$

4 Fractions algébriques

Exercice 8

Simplifiez les fractions suivantes :

1. $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$
2. $\frac{2x^2 + 3x - 2}{4x^2 - 1}$
3. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4}$
4. $\frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$
5. $\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 2x - 3}$
6. $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x - 2}$
7. $\frac{4x^3 + 8x^2 - 9x - 18}{2x^2 + 7x + 6}$
8. $\frac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 - 3x - 2}$
9. $\frac{2x^2 - 13x - 7}{4x^2 + 4x + 1}$
10. $\frac{x^3 + x^2 - 14x - 24}{x^2 - 2x - 8}$

Exercice 9

Résolvez les équations suivantes en réduisant d'abord au même dénominateur.

1. $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{35}$
2. $\frac{4}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1} + 1$
3. $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x-1}{x-3} = \frac{25}{12}$
4. $\frac{2x-1}{3} + \frac{3}{x-8} = \frac{x-5}{x-8} + 3$
5. $\frac{8x-3}{x+3} - 2x = 4 - \frac{3x^2}{x+3}$
6. $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{4}{2x^2-2x}$
7. $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{x^2-75}{x^2+5x+6}$
8. $\frac{x-2}{3(x-1)} + \frac{x-1}{4(x-2)} = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$

5 Inéquations

Exercice 10

Résolvez dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

1. $x - 1 > 0$
2. $2x - 1 > 0$
3. $-x - 1 > 0$
4. $-2x - 1 > 0$
5. $x + 1 > 0$
6. $2x + 1 > 0$
7. $-x + 1 > 0$
8. $-2x + 1 > 0$
9. $x - 3 \leq 0$
10. $2x - 3 \leq 0$
11. $-x - 3 \leq 0$
12. $-2x - 3 \leq 0$
13. $x + 3 \leq 0$
14. $2x + 3 \leq 0$
15. $-x + 3 \leq 0$
16. $-2x + 3 \leq 0$

Exercice 11

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $x^2 + 2x - 15 > 0$
2. $x^2 - 5x + 4 < 0$
3. $-2x^2 + 3x + 2 > 0$
4. $-3x^2 + 7x - 2 < 0$
5. $x^2 + 31x + 150 > 0$
6. $x^2 - 10 > 3x$
7. $-x^2 < x - 12$
8. $x^2 + 7 > 3x$
9. $x^2 < 8 - 7x$
10. $x^2 < 4$
11. $100 > x^2$
12. $x^2 > 3x$
13. $x(x+2) < 3x$
14. $3x(x-3) > 5(x-3)$
15. $(2-x)(4x-5) < 0$

Exercice 12

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\frac{x-3}{x+2} < 0$
2. $\frac{x+5}{5-x} > 0$
3. $\frac{3x+1}{3-x} \geq 0$
4. $\frac{1}{4x^2-x-3} < 0$
5. $\frac{2x+1}{x-3} \geq 1$
6. $\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{2}$
7. $\frac{2}{x-3} < \frac{1}{x}$
8. $\frac{x^2+1}{x^2-2x-3} > 0$
9. $\frac{x-1}{x^2-2x-8} < 0$