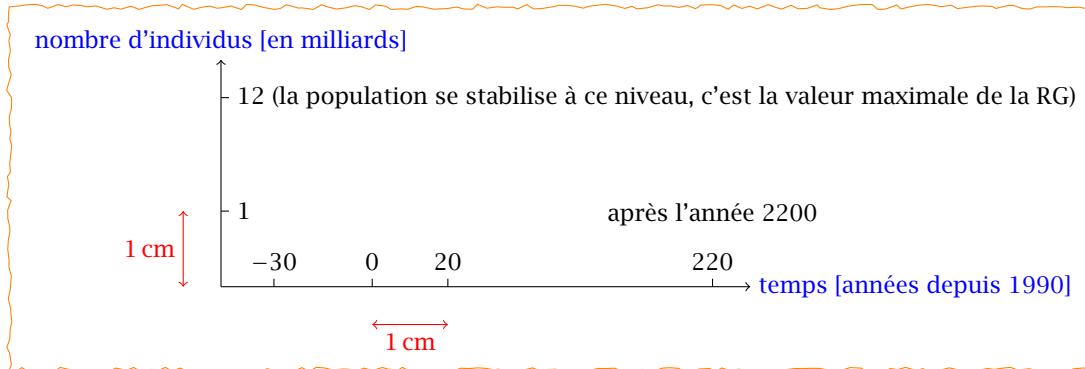


Exercice 1

1. (a) Préparons notre *représentation graphique* à l'aide du schéma suivant qui suggère quelques valeurs importantes qui doivent figurer sur le graphique final :



Afin de construire (dans **TABLE**) des *tableaux de valeurs* pour les trois fonctions (fonctions dont nous n'aurons plus besoin par la suite), nous posons les définitions suivantes (dans **HOME**, ou même directement dans l'éditeur **Y=**) :



NewProb

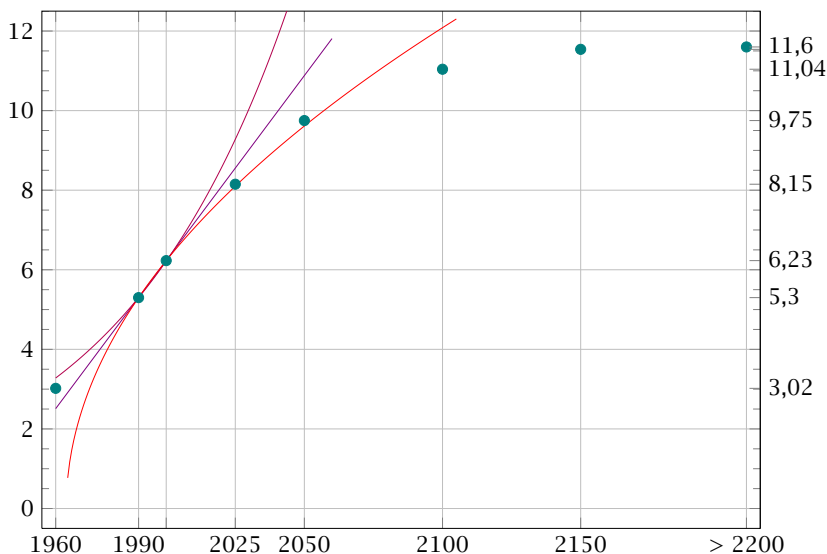
$\text{round}(0.093x+5.3, 2) \rightarrow y1(x)$
 $\text{round}(5.3e^{(0.016x)}, 2) \rightarrow y2(x)$
 $\text{round}(\sqrt{(1.072t+28.09)}, 2) \rightarrow y3(x)$

(attention! il y a une erreur dans la dernière ligne — laquelle?) et dans l'éditeur **TBLSET** nous précisons les *paramètres d'échantillonnage*



tblStart = -30
Δtbl = 10

On obtient alors sans trop de difficultés la *représentation graphique* de ces trois fonctions :



(b) Aucune de ces fonctions n'est *bornée* : elles croissent indéfiniment en contradiction avec l'hypothèse que la population se stabilise (après 2200).

Remarquons que même pour l'intervalle [1960; 2050] l'approximation fournie par les fonctions est peu satisfaisante.

- (c) - Le modèle de la *croissance exponentielle* ne convient pas du tout, le graphe s'éloignant beaucoup trop rapidement des données.
- La même remarque s'applique au *modèle linéaire*, quoique dans une moindre mesure.
- Le *modèle parabolique* convient à peu près pour la période [1990; 2050].

2. (a) Étudions le comportement de y pour les « grandes » valeurs de t :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + b \cdot e^{-\alpha \cdot t}} = \frac{a}{1 + 0} = a$$

car $\alpha > 0$. D'après nos données, a vaut donc 11,6.

(b) Pour déterminer les deux constantes b et α , nous avons besoin de deux conditions pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues ; l'énoncé nous impose

$$y(-30) = 3,02 \quad y(0) = 5,3$$

D'où le code



```
11.6/(1+b*e^(-alpha t)) -> y(t)
{y(0) = 5.3, y(-30) = 3.02} -> conds
solve(conds, {b,alpha})
```

qui fournit les valeurs approchées :

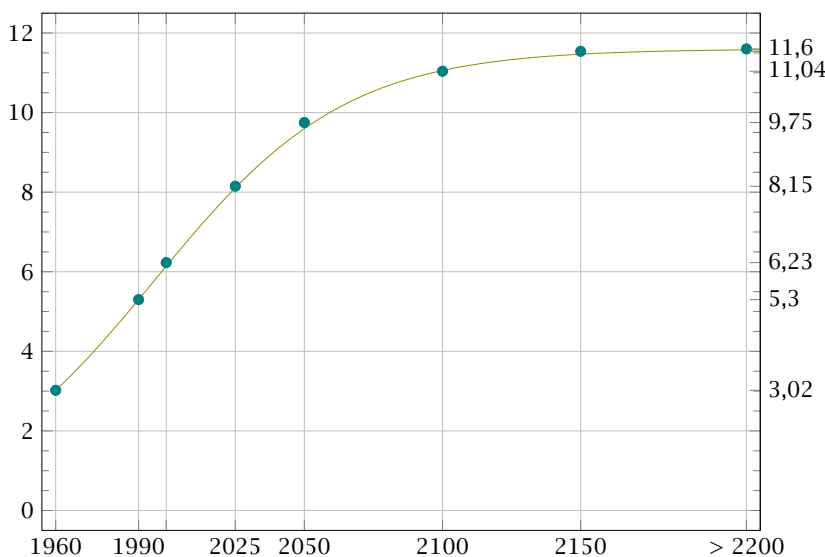
$$b \approx 1,1887 \quad \alpha \approx 0,029$$

3. (a) On utilisera les paramètres et dimensions graphiques obtenues en (1a). Le tableau des valeurs sera calculé à l'aide de la définition



```
NewProb
11.6/(1+1.1887*e^(-0.029 t)) -> y(t)
```

Ces travaux préliminaires permettent d'obtenir la représentation graphique de y :



- (b) • *Les asymptotes*

Les deux expressions voyage 200



| **limit**(y(t), t, -∞)
| **limit**(y(t), t, ∞)

permettent d'écrire d'une part

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$$

ce qui signifie que le graphe admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = 0$ ¹

et d'autre part

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 11,6$$

ce qui signifie que le graphe admet une deuxième asymptote horizontale.

- *Les extrémums*

Nous voulons connaître le *signe* de la dérivée y' de y :



| **d**(y(t), t) → dy(t)
| **zeros**(dy(t), t)

La dérivée première ne s'annulant jamais (car la voyage 200 fournit comme résultat une liste vide), elle ne change pas de signe, son signe est *constant* (par *continuité*) ; il suffit alors de le déterminer en un point-témoin quelconque, par exemple pour $t = 10$:



| **sign**(dy(10))

Ce dernier résultat étant 1, y est une fonction *strictement croissante*.

Ou encore, plus simplement :



| **solve**(dy(t) > 0, t)

Nous obtenons le résultat **true** ce qui signifie que la fonction y' est toujours *strictement positive* et partant y est strictement croissante.

- *Les points d'inflexion*

Nous devons déterminer les réels en lesquels y'' s'annule et change de signe :



| **d**(y(t), t, 2) → d2y(t)
| **zeros**(d2y(t), t) → ts

D'après le calcul précédent, $t_0 \approx 5,96$ est le seul zéro de y'' ; en utilisant des réels-témoins choisis (de manière aléatoire) dans chacun des intervalles délimités par t_0



| **sign**(d2y({3,7}))

nous obtenons le tableau

Utilisez la fonction **sign** si le nombre en tant que tel ne vous intéresse guère.

1. Vous avez certainement remarqué que les notations de l'exercice ne sont pas particulièrement judicieuses.

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
$y''(t)$	+	0	-
$y'(t)$	$\longrightarrow y'(t_0) \longrightarrow$		

Calculons encore $y(t_0)$ (ordonnée du point d'inflexion) et $y'(t_0)$ (la vitesse de croissance en t_0) :



| {y(t), dy(t)} | t=ts

D'où :

$$y(t_0) \approx 5,8 \quad y'(t_0) \approx 0,084 \text{ 1}$$

la population croît avec une vitesse de 84 millions d'individus par an.

Évidemment : l'expression



| solve(d(y(t),t,2) > 0, t)

(qui donne comme résultat $t < 5.96\dots$) permet de construire le tableau sans passer par des valeurs témoins.

On en déduit les coordonnées approchées du point d'inflexion I de y : $J(5,96; 5,8)$ est proche de I .

- (c) L'accroissement (en milliards d'individus par an) est donné par y' ; nous devons donc résoudre l'inéquation

$$y'(t) < 0,05$$

respectivement déterminer le signe de

$$y'(t) - 0,05$$

L'expression



| zeros(dy(t) - 0.5,t)

fournit comme zéros de $y'(t) - 0,05$ les réels $t_1 \approx -46$ et $t_2 \approx 58$.

Par *continuité*, le signe de y' est *constant* sur chacun des intervalles $(-\infty; t_0[$, $]t_0; t_1[$ et $]t_1; +\infty)$. À l'aide de trois réels-témoins, nous obtenons le *tableau des signes*

t	$-\infty$	t_1	t_2	$+\infty$	
$y'(t) - 0,05$	-	0	+	0	-

qui permet de conclure que l'accroissement annuel de la population était inférieur à 50 millions avant 1944 (= 1990 - 46) et après 2048 (= 1990 + 58).

- (d) La *moyenne* d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ est donnée par

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

donc la moyenne de la population entre les instants $t = 0$ et $t = 160$ est donnée par

$$\frac{1}{160 - 0} \int_0^{160} y(t) dt$$

L'expression voyage 200



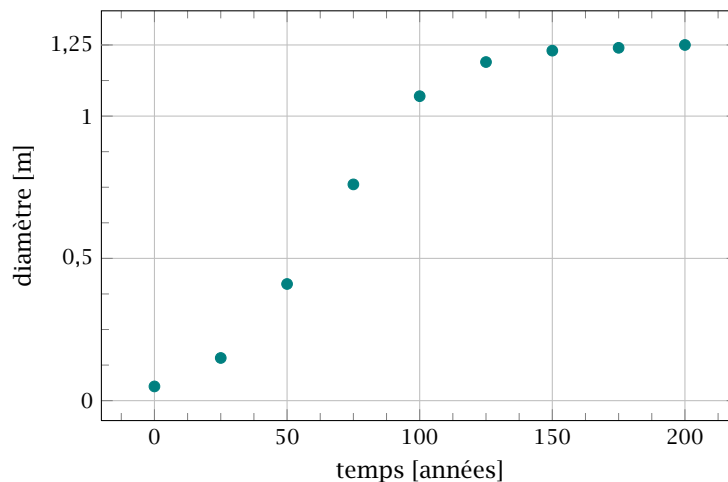
$$| \int (y(t), t, 0, 160) / 160$$

nous fournit la valeur approchée 9,67 de la moyenne : entre 1990 et 2150, la moyenne (annuelle) de la population est presque de 10 milliards de personnes.

- (e) L'abscisse du point d'inflexion, en laquelle y' prend sa valeur maximale, représente le moment de *la croissance la plus forte* de y : en 1996 (= 1990+6), la croissance de la population était donc maximale, avec un accroissement de $y'(5,96) \approx 0,084$, c'est-à-dire de 84 millions de personnes par an.

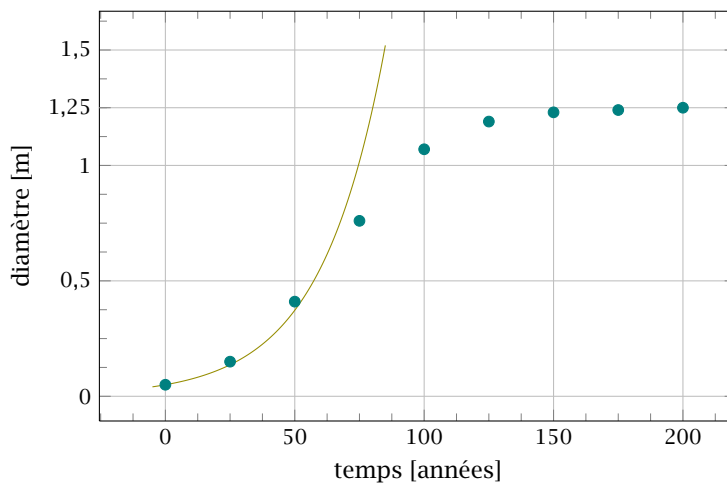
Exercice 2

1. Représentation graphique des mesures (remarquez que pour l'instant nous n'interpolons pas en construisant une courbe passant par ces points; c'est précisément le sujet des questions suivantes) :



Le graphique et le tableau suggèrent que l'épaisseur maximale est proche de 1,25 m.

2. Superposons donc au graphique précédent une représentation de la fonction f :



Le *modèle exponentiel* est acceptable pour $t \in [0; 75]$. Ensuite, il ne tient pas compte du ralentissement de la croissance — au contraire, le modèle exponentiel suggère une croissance infinie.

D'ailleurs, comment a-t-on obtenu ce modèle ? Entre les moments 25 et 50 le diamètre passe de 0,15 m à 0,41 m c'est-à-dire le diamètre est multiplié par 2,73 environ ; si l'on considère cette période comme représentative, on peut penser que cette observation restera valable pour les périodes ultérieures : pendant chaque période, le diamètre sera multiplié par 2,73, exactement comme dans nos exemples d'introduction : une augmentation de 173 %.

D'où l'expression :

$$\text{diamètre après } n \text{ périodes} = \text{diamètre initial} \cdot 2,73^{\text{nombre de périodes}}$$

Et nous comprenons mieux pourquoi le modèle exponentiel est inadéquat : l'hypothèse d'une augmentation relative constante de 173 % n'est pas réaliste.

Bizarre : vous avez sans doute remarqué que $2,73 \approx e$. Honni soit qui mal y pense. Notre fonction est donc pour $t \in [0; 75]$ indiscernable de

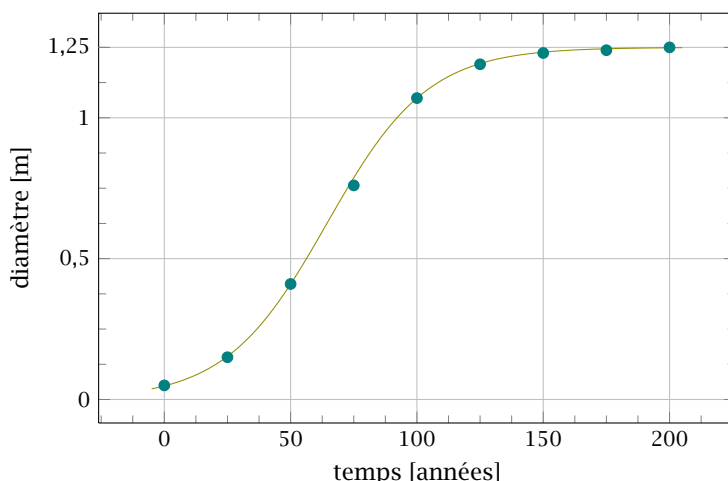
$$f(t) = 0,05 \cdot e^{\frac{t}{25}} = \frac{5}{100 \cdot e^{-\frac{t}{25}}}$$

Il est très facile de bloquer le comportement trop intempestif de l'exponentielle en ajoutant au dénominateur une constante : la *croissance logistique*.

3. (a) Superposons maintenant à nos mesures le graphe de la *fonction logistique*

$$g(t) = \frac{5}{100 \cdot e^{-\frac{t}{20}} + 4}$$

Le *modèle logistique* a été proposé vers 1840 par le mathématicien belge *Pierre François Verhulst* pour représenter l'évolution d'une population



Cette nouvelle fonction, nul ne pourra le nier, représente la croissance de l'épicéa avec une grande et merveilleuse précision. Elle pourra donc répondre à nos innombrables questions d'interpolation et d'extrapolation.

- (b) Il s'agit de résoudre l'équation $g(t) = 1$ dont l'unique solution est $t \approx 92,1$, résultat qui peut s'interpréter en disant que l'épaisseur de 1 m est atteinte, suivant notre modèle, 92 ans après le début des mesures.
- (c) La vitesse de croissance est donnée par la dérivée g' ; nous devons donc déterminer un éventuel maximum de g' ; or la dérivée de g' , c'est-à-dire g'' , s'annule en $t \approx 64,4$. La fonction continue g'' garde un signe constant sur $(-\infty; t[$ et sur $]t; +\infty)$, signes qu'il est facile de déterminer à l'aide de points témoins :

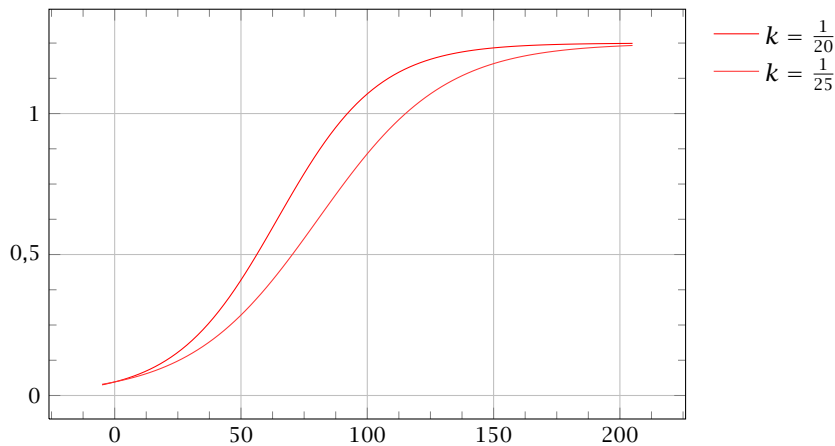
t	$t \approx 64,4$
$g''(t)$	+ 0 -

de sorte que le point critique de g' est bien un maximum. Sa valeur (c'est-à-dire la vitesse maximale) est alors proche de $g'(t) \approx 1,5$: l'épaisseur de l'épicéa augmente de 1,5 cm/année.

Mais un extrémum de g' correspond, nous le savons depuis des temps immémoriaux, à un *point d'inflexion* de g .

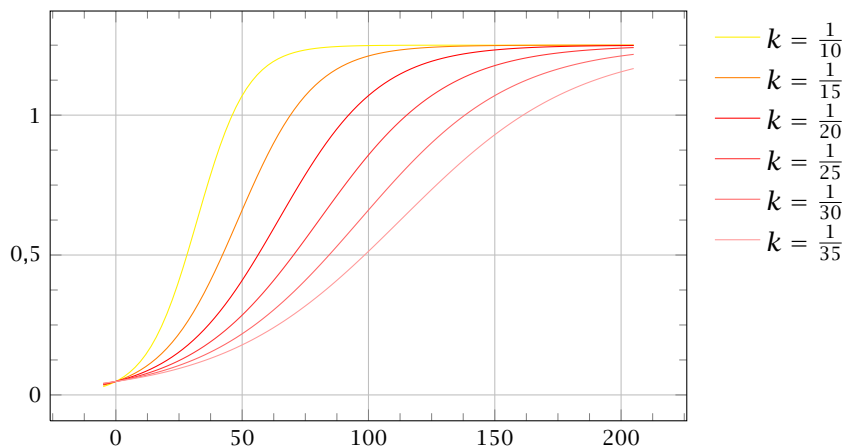
- 4. (a) Le premier graphe représente bien le comportement de g' : la fonction représentée est positive (la fonction g est croissante indéfiniment); la vitesse de croissance est faible au début et à la fin, et admet un maximum.
 - (b) Le second graphe représente une fonction négative sur plusieurs intervalles, ce qui est en contradiction avec la croissance de g .
 - (c) La fonction représentée, bien que toujours positive, n'admet pas de maximum : intuitivement, elle représente une croissance qui s'accélère indéfiniment; ce n'est pas sérieux.
 - (d) Cette dernière fonction est toujours négative et la fonction g serait toujours décroissante, ce qui n'est pas le cas.
5. Vous avez sans nul doute remarqué que l'on (qui ?) a remplacé le facteur 25 de la croissance exponentielle par le facteur 20. Sans explication. Essayons d'en concocter une en étudiant l'influence du paramètre k dans l'expression

$$h_k(t) = \frac{5}{100 \cdot e^{-k \cdot t} + 4}$$



Déjà cette comparaison des graphes de $h_{\frac{1}{25}}$ et $h_{\frac{1}{20}}$ suggère que le point d'inflexion se déplace vers la droite si $k > 0$ diminue : si k diminue, la croissance devient de plus en plus faible.

Cette impression est confirmée si nous calculons quelques graphes supplémentaires :



Exercice 3

1. La fonction f vérifie les conditions suivantes :

$$f(0) = 200 \quad f(1) = 240$$

système qui admet la solution $\alpha = 200, \beta = \ln \frac{6}{5} \approx 0,182$, valeur approchée à 10^{-3} près par défaut.

Remarquez que le modèle suggéré revient à supposer que la population augmentera *chaque jour* de 20%, de sorte que la fonction f s'écrit plus simplement

$$f(t) = 200 \cdot 1,2^t$$

Mais, afin de pouvoir répondre aux questions subséquentes, nous allons utiliser les valeurs approchées obtenues ci-dessus et étudier la fonction

$$f(t) = 200 \cdot e^{0,182t}$$

2. Le problème posé peut être traduit par l'inéquation en t

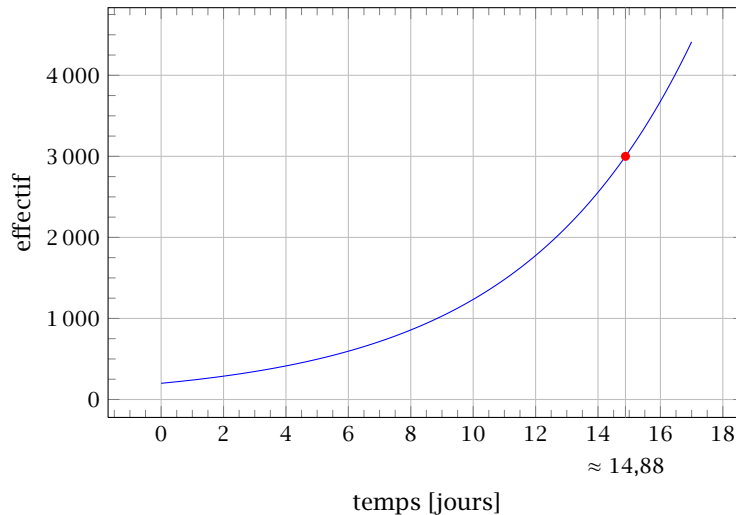
$$f(t) > 3\,000$$

[Le modèle de Malthus](#)

qui admet la solution (approchée) : $t > 14,88$.

Au quinzième jour donc, l'effectif de la population dépasse les 3 000 individus.

3. Représentation graphique de la fonction f dans un repère particulièrement bien choisi :



4. Comme la fonction f n'est pas bornée, tend vers l'infini si $t \rightarrow \infty$, le modèle exponentiel proposé n'est pas compatible avec la condition que l'effectif de la population ne dépassera pas les 3 500 individus (la fonction dépasse cette valeur si $t > 15,726$).

5. La fonction g devra vérifier les conditions

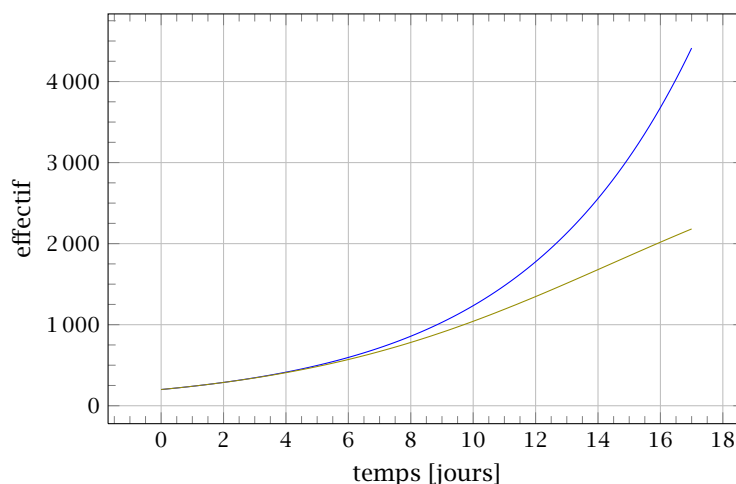
[Le modèle de Verhulst](#)

$$g(0) = 200 \qquad g(1) = 240 \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 3\,500$$

Le système admet la solution (approchée)

$$g(t) = \frac{3\,500}{1 + 16,5 \cdot e^{-0,194\,5t}}$$

6. Représentation graphique des fonctions f et g dans un repère qui semble moins bien choisi :



7. L'unique réel t tel que

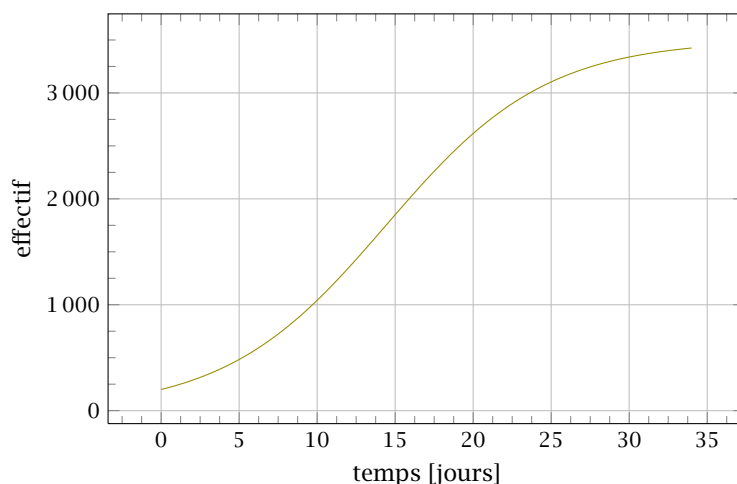
$$g(t) = 3\,000$$

est $t \approx 23,63$. La fonction g étant strictement croissante, nous pouvons affirmer qu'à partir du 24^e jour, l'effectif de la population dépasse les 3 000 individus.

8. Essayons de déterminer le moment où l'effectif de la population augmente le plus rapidement, où la vitesse de croissance est maximale. La vitesse de croissance étant donnée par g' , nous devons donc étudier si g' admet un maximum; calculons la dérivée g'' de g' et construisons le tableau des variations de g'

t	0	$t \approx 14,41$	$+\infty$
$g''(t)$		+	0 -
$g'(t)$		$\approx 170,19$	

La vitesse de croissance est donc maximale le 14^e jour en fin de matinée, la population augmentant alors de 170 bestioles (par jour).



Exercice 4

1. Un polynôme p de degré trois peut s'écrire sous la forme

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0)$$

p doit vérifier le système de conditions nécessaires

$$p(0) = 0,1 \quad p(100) = 1,27 \quad p(200) = 2 \quad p'(200) = 0$$

système qui admet comme unique solution la fonction

$$p(x) = -2,55 \cdot 10^{-7} x^3 + 5,45 \cdot 10^{-5} x^2 + 8,8 \cdot 10^{-3} x + 0,1$$

On vérifie que $p''(200) < 0$, de sorte que p admet effectivement en 200 un maximum.

2. (a) La hauteur du début des mesures est évidemment

$$h_\alpha(0) = \frac{2}{19 + 1} = 0,1 \text{ m}$$

résultat d'ailleurs en parfaite cohérence avec les données de la question précédente.

Cette deuxième partie est indépendante de la partie précédente

(b) Étudions le signe de la dérivée de h_α :

$$\forall t \in \mathbb{R} : h'_\alpha(t) = \frac{38 \alpha e^{\alpha t}}{(19 + e^{\alpha t})^2} > 0$$

ce qui montre que h_α est *strictement croissante* sur tout \mathbb{R} .

Les h_α constituent cce qu'on appelle une *famille* de fonctions dépendant d'un paramètre

(c) D'après ce modèle, la hauteur tend vers

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_\alpha(t) = 2$$

La fonction h_α étant strictement croissante, cette limite n'est jamais atteinte (en un t fini), contrairement à la situation réelle, un tournesol atteignant certainement une hauteur maximale avant de dépérir.

(d) Comme la vitesse de croissance est donnée par la dérivée de h_α , nous devons donc déterminer les maxima de h'_α ; or on a

$$\forall t \in \mathbb{R} : h''_\alpha(t) = -\frac{38 e^{\alpha t} \cdot \alpha^2}{(19 + e^{\alpha t})^2} \cdot (e^{\alpha t} - 19)$$

expression qui montre que la dérivée h''_α de h'_α s'annule et change de signe en

$$t = \frac{\ln(19)}{\alpha}$$

Comme $\alpha > 0$, par hypothèse, la fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$ est strictement *croissante*. D'où finalement le tableau des signes :

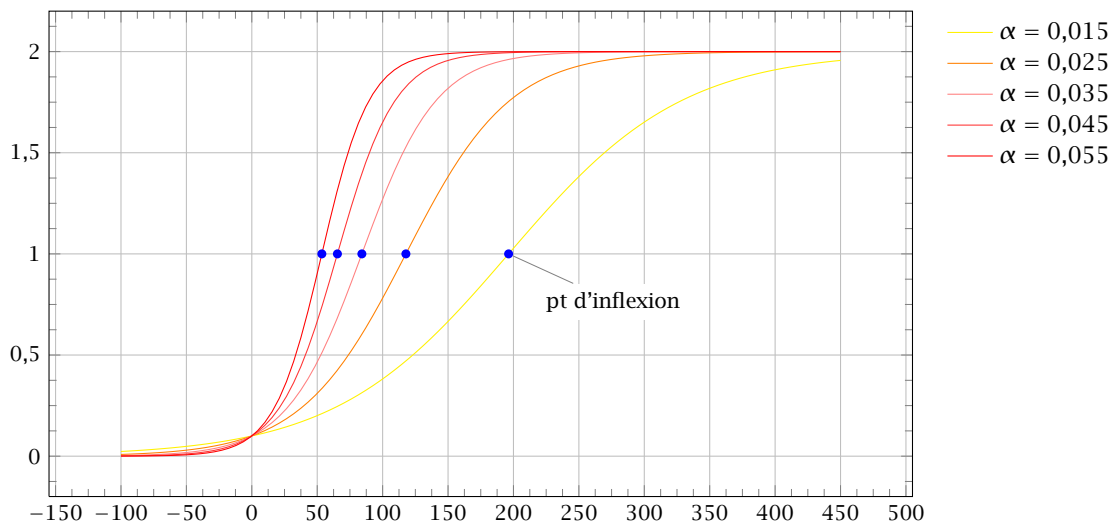
t	0	$\frac{\ln(19)}{\alpha}$	$+\infty$
$h''_\alpha(t)$	+	0	-

La vitesse de croissance est donc bien *maximale* en $t = \frac{\ln(19)}{\alpha}$. La hauteur correspondante du tournesol est

$$h_\alpha\left(\frac{\ln(19)}{\alpha}\right) = 1$$

Un extrémum de h'_α n'est autre qu'un *point d'inflexion* du graphe de h_α .

(e) Voici le graphe de h_α , pour $\alpha \in \{0,015, 0,025, \dots, 0,055\}$:



On constate que si α augmente, la croissance de la borne inférieure 0 vers la borne supérieure 2 est de plus en plus rapide ; géométriquement, le point d'inflexion se déplace vers la gauche.

(f) La fonction H vérifie les deux conditions

$$H(0) = 0,2 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 1,8$$

Système qui admet comme solution $a = 1,8$, $b = 8$, α restant indéterminé de sorte que la fonction s'écrit

$$H(t) = \frac{1,8}{1 + 8 \cdot e^{-\alpha t}}$$

et le paramètre α définit la vitesse de croissance.

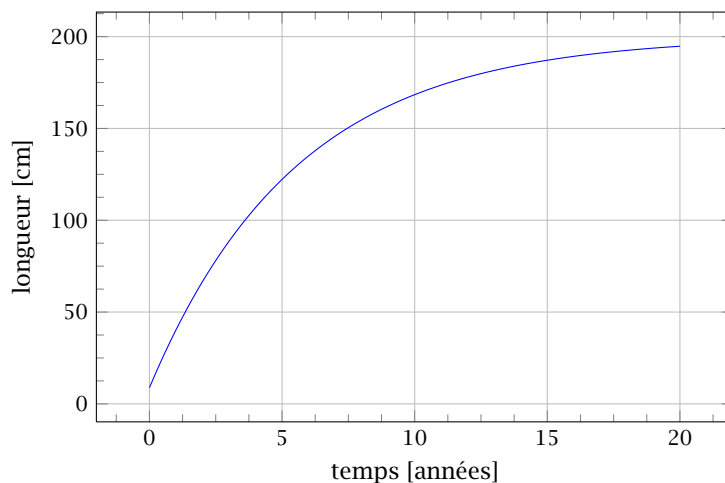
Exercice 5

1. Les paramètres a , b et k de la fonction f doivent vérifier le système

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 200 \quad f(10) = 168,4 \quad f'(10) = 5,69$$

dont l'unique solution est

$$a = 200 \quad b \approx 0,956 \quad k \approx 0,18$$



2. Par hypothèse, la fonction considérée s'écrit

$$f(t) = 200 \cdot (1 - 0,956 \cdot e^{-0,18t})$$

Si le flétan atteint la longueur de 100 cm à l'âge t , alors t vérifie

$$f(t) = 100$$

équation dont l'unique solution est $t \approx 3,6$.

À ce moment, sa vitesse de croissance est

$$f'(3,6) \approx 18$$

Donc, le flétan atteint une longueur de 100 cm après 3,6 années et sa vitesse de croissance est alors de 18 cm/an.

3. Le poids d'un flétan de 5 ans est (en kg)

$$p\left(\frac{f(5)}{100}\right) \approx 19$$

4. Un flétan atteint à la limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p \left(\frac{f(t)}{100} \right) \approx 83 \text{ kg}$$

5. (a) Notons q la fonction qui exprime le poids d'un flétan en fonction de son âge :

$$q(t) = p \left(\frac{f(t)}{100} \right)$$

(b) La fonction q' représente la vitesse de croissance du flétan; nous devons donc déterminer les extrémums de q' . L'unique zéro positif t_+ de q'' est le réel $t_+ \approx 5,85$. La continuité de q'' permet d'utiliser des valeurs témoins pour déterminer son signe : $q''(3) > 0$ et $q''(9) < 0$. D'où le tableau :

t	0	t_+	∞
$q''(t)$	+	0	-

qui montre que q' admet un *maximum* en $t_+ \approx 5,85$: le poids du flétan augmente le plus rapidement quand celui-ci est âgé de presque 6 ans. La vitesse de croissance maximale est

$$q'(t_+) \approx q'(5,85) \approx 6,64$$

ce qui signifie que le flétan croît alors de 6,64 kg par an.

Exercice 6

1. (a) Il s'agit de déterminer les *maximums* de la fonction f , s'ils existent. Comme f admet en t un maximum si $f'(t) = 0$ et $f''(t) < 0$, le code

Condition suffisante

```

| 20 t e^(-0.5t) -> f(t)
| d(f(t),t) -> df(t)
| d(f(t),t,2) -> d2f(t)
| zeros(df(t),t) -> ts
| f(ts)
| d2f(ts)
    
```

permet de conclure que la concentration est *maximale* à l'instant $t_0 \approx 2$ (c'est-à-dire 2 heures après la prise du médicament) et que la concentration maximale vaut $f(t_0) \approx 14,72$ mg/l.

(b) Le médicament est *efficace* au moment t si $f(t) > 5$: la traduction voyage200 de cette idée

```

| solve(f(t)>5,t)
    
```

ne permet pas de répondre à la question. Essayons de procéder autrement : le *signe* de $f(t) - 5$ est *constant* sur chacun des intervalles délimités par les zéros de $f(t) - 5$. L'expression

À cause de la continuité de $f(t) - 5$

```

| zeros(f(t)-5,t)
    
```

nous fournit les zéros $t_1 \approx 0,29$ et $t_2 \approx 6,52$ de $f(t) - 5$ (arrondis au centième près).

En utilisant des points-témoins dans chacun des trois intervalles $]0; t_1[$, $]t_1; t_2[$, $]t_2; 20[$ pour déterminer le signe de $f(t) - 5$, nous pouvons enfin affirmer que le médicament est efficace entre 0,29 h et 6,52 h.

(c) Les variations de la concentration du médicament sont décrites par la fonction f' . Nous devons déterminer le moment où la concentration diminue le plus fortement, en d'autres mots : les *minimums* (s'ils existent) de f' . Or f' admet en t un minimum si $(f')'(t) = 0$ et $(f')''(t) > 0$.

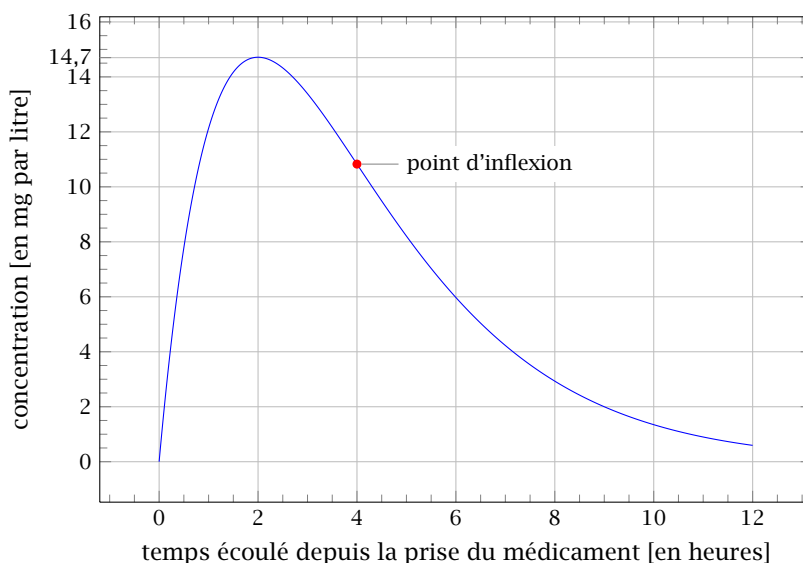
Condition suffisante

Le code



```
zeros(d2f(t),t) → ts
d(df(t),t,2) | t=ts
df(ts)
```

montre que f' admet effectivement en $t \approx 4$ un minimum et que 4 heures après la prise du médicament, la concentration de celui-ci diminue avec une vitesse de 2,71 mg/l par heure.

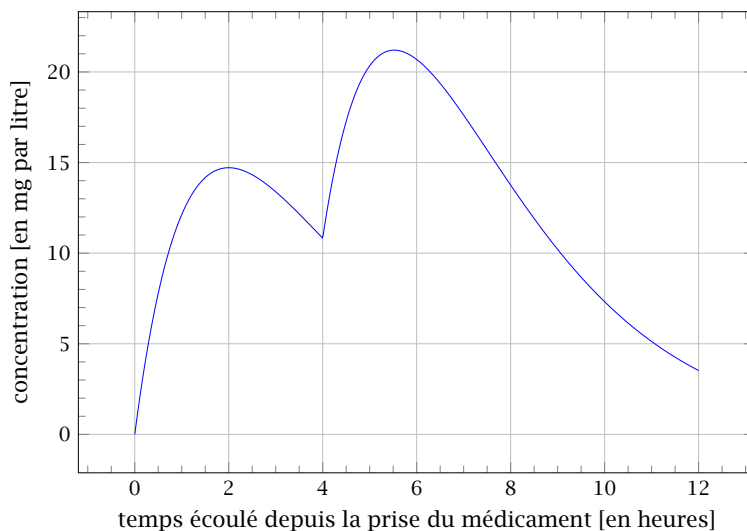


Remarquons que $t = 4$ est l'abscisse du point d'inflexion de f .

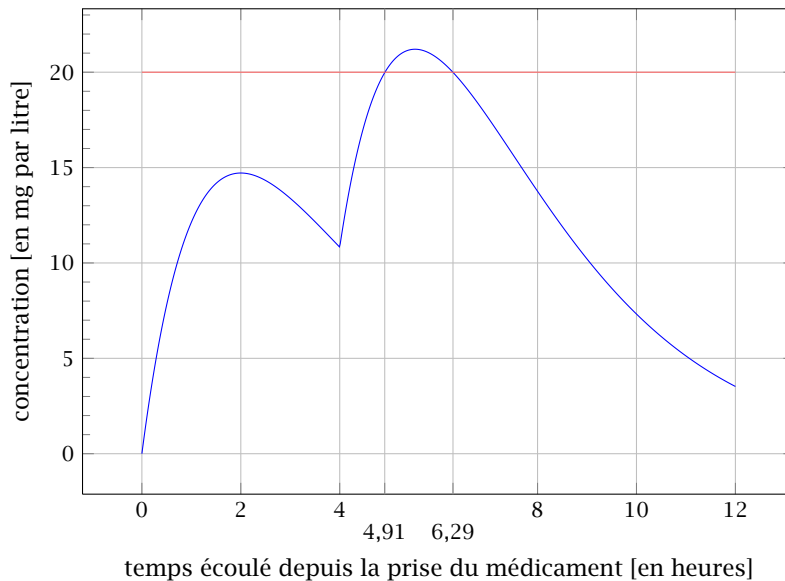
2. (a) La fonction k qui représente la concentration totale du médicament dans le sang est donnée par

$$k(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ f(t) + f(t - 4) & \text{si } 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

Voici sa représentation graphique :



(b) Le graphique précédent montre immédiatement que cette directive n'est pas respectée :



Le code



```
| zeros(k(t)-20,t)
```

montre que le dépassement a lieu entre les instants 4,91 h et 6,29 h (arrondis au centième).

3. (a) La fonction g doit vérifier les conditions *nécessaires*

$$g(4) = 14, \quad g'(4) = 0$$

Le code



```
a*t*e^(-b*t) -> j(t)
d(j(t),t) -> dj(t)
{j(4)=14, dj(t)=0} -> conds
solve(conds, {a,b}) -> paras
j(t) | paras -> g(t)
```

nous fournit les valeurs de nos paramètres

$$a = \frac{7}{2}e, \quad b = \frac{1}{4}$$

et partant l'expression analytique de g :

$$g(t) = \frac{7}{2} t e^{1-\frac{1}{4}t}$$

Il nous reste à vérifier que g admet bien en $t = 4$ un *maximum* : le code

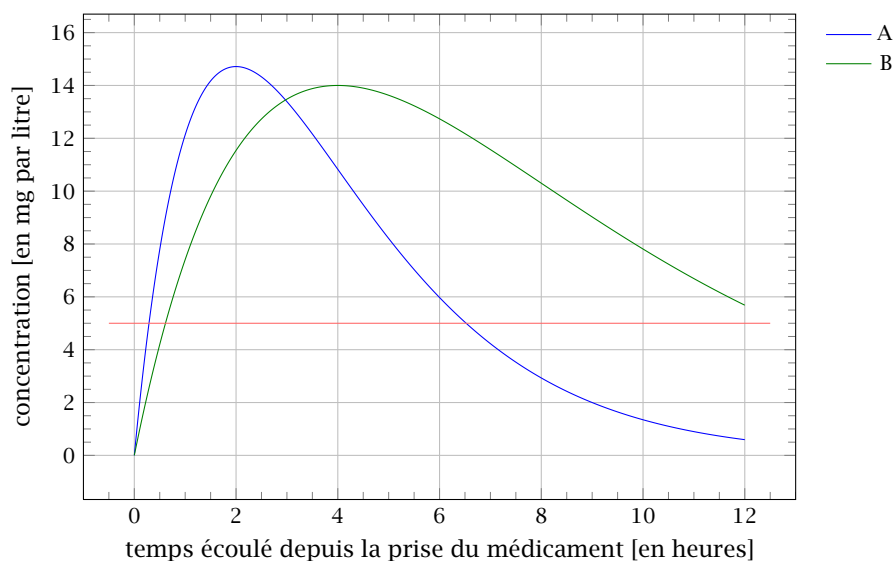


```
| (d(g(t),t,2) | t = 4) < 0
```

confirme que $g''(4) < 0$.

4. Comparons les périodes pendant lesquelles les deux médicaments sont efficaces :
 - nous savons déjà que le médicament **A** est efficace entre 0,29 h et 6,52 h

- un calcul analogue montre que **B** est efficace entre 0,61 h et 12,76 h, ce qui est un intervalle de temps nettement plus long.



Exercice 7

- (a) Comme

$$q = 3 \cdot 11, \quad b = 29,5, \quad a = 9$$

l'expression analytique de f s'écrit

$$f(t) = \frac{33}{29,5} \cdot (1 - e^{-9t}) - 0,145t$$

Préparons nos travaux ultérieurs sur la voyage200 à l'aide des définitions suivantes :



```
33/29.5*(1-e^(-9t))-0.145t → f(t)
d(f(t),t) → df(t)
d(f(t),t,2) → d2f(t)
```

Le fait que la personne observée a de l'alcool dans le sang à l'instant t se traduit par la relation $f(t) > 0$.

Construisons sur la voyage200 une *représentation graphique* de f : déterminons la *fenêtre de tracé* dans l'éditeur **Window**



```
xmin=-1
xmax=10
ymin=-1
ymax=1.5
```

L'écran graphique de la voyage200 suggère alors que f s'annule en $t_0 \approx 0$ et en $t_1 \approx 7$ que $f(t) > 0$ pour $t \in]t_0; t_1[$.

Pour avoir une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près, nous pouvons utiliser, toujours dans l'écran graphique, la fonction Zero dans le menu **Math**. Nous obtenons finalement : $t_1 \approx 7,715$.

- (b) Le graphique obtenu précédemment suggère que f admet un seul maximum : la fonction Maximum du menu **Math** nous en donne les coordonnées approchées : $t_2 \approx 0,471$ et $f(t_2) \approx 1,034$

D'où le *tableau des variations* :

Vous pouvez aussi étudier directement le signe de f' en utilisant deux points témoins.

t	t_0	t_2	t_1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\xrightarrow{\hspace{1.5cm}} f(t_2) \xleftarrow{\hspace{1.5cm}}$		

dont l'interprétation en termes concrets est : 28 minutes ($60 \cdot 0,471$) après avoir bu son vin, le convive a un taux maximal d'alcoolémie de 1,034%.

- (c) Complétons notre représentation voyage200 par le graphe de la fonction affine $g : t \mapsto 0,8$. La fonction Intersection du menu **Math** permet de déterminer les points d'intersection des deux graphes : $t_3 \approx 0,147$ et $t_4 \approx 2,198$ sont les abscisses correspondantes.

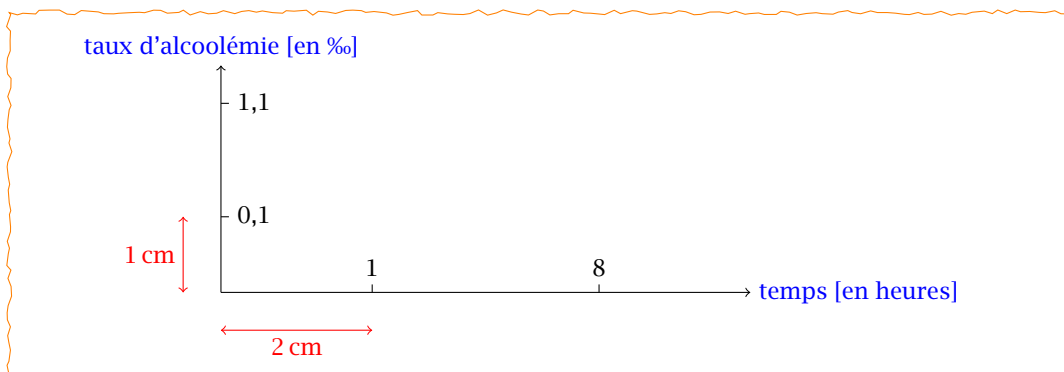
Le graphe de f est au-dessus de la droite représentative de g sur l'intervalle $[t_3; t_4]$.

Concrètement : la personne ne devrait pas conduire entre 9 minutes après le début de la beuverie et 2 heures 11 minutes plus tard.

- (d) Nous devons construire une représentation graphique (soignée et précise) de f , en y ajoutant toutes les informations obtenues précédemment.

Cette construction s'effectue de nouveau en trois étapes :

- Préparation de la représentation graphique à l'aide d'une esquisse



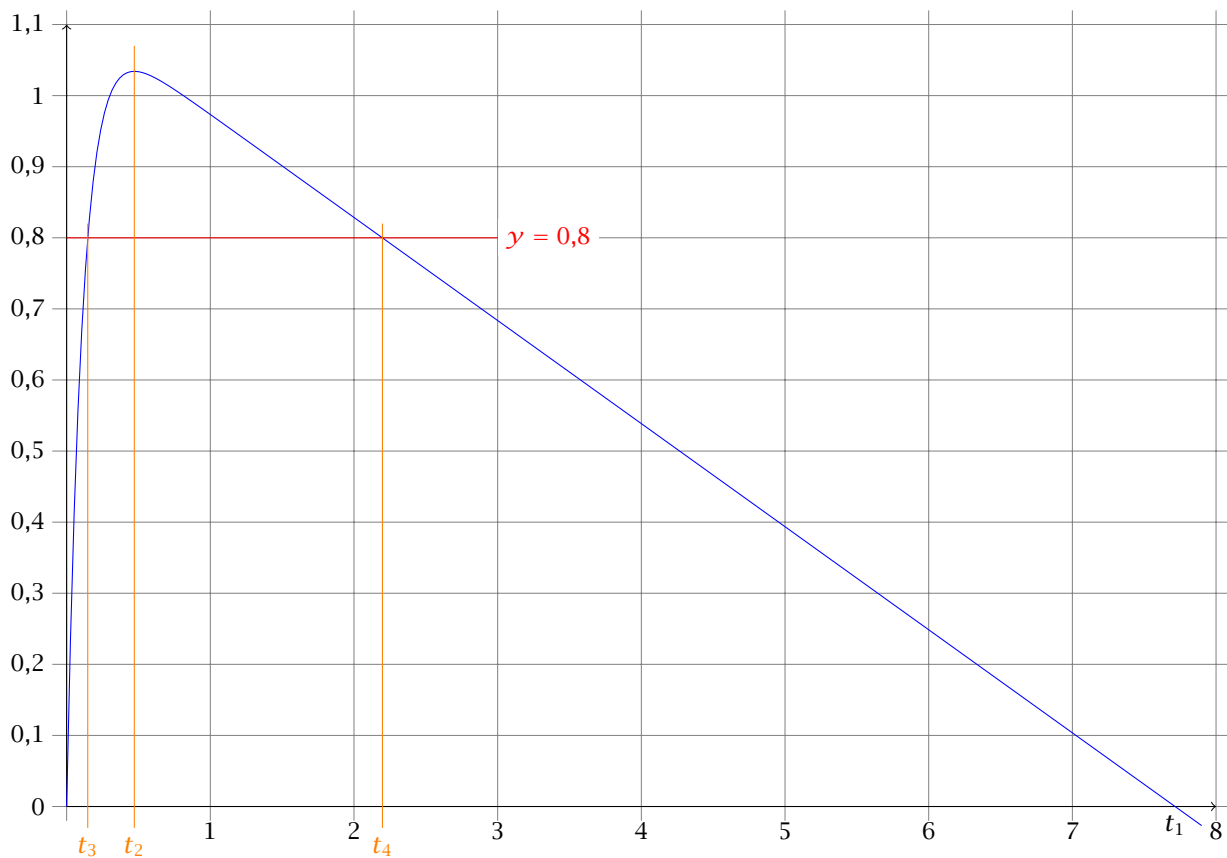
- Pour effectuer l'échantillonnage à l'aide de notre voyage200, nous utiliserons les expressions auxiliaires



```
round(10*f(x),2) → y3(x)
tblStart = 0
Δtbl = 0.25
```

On pourrait même effectuer deux échantillonnages, l'un, très fin, entre 0 et 1, de pas $\Delta\mathbf{tbl} = 0.05$ et l'autre, nettement plus grossier, entre 1 et 8, de pas $\Delta\mathbf{tbl} = 0.5$.

- Voici enfin la figure définitive :



(e) Par définition, l'effet est donné par l'intégrale $\int_0^{t_1} f(t) dt$ ou, en langage voyage200 :



| f(f(t),t,0,7.715)

Valeur approchée : 4,191

2. Étude de l'influence du paramètre a .

(a) Si $a = 1,2$, et $q = 3 \cdot 11$, la fonction f admet comme expression analytique

$$f(t) = \frac{33}{29,5} \cdot (1 - e^{-1,2t}) - 0,145t$$

Le code



```
33/29.5*(1-e^(-1.2t))-0.145t -> f(t)
zeros(d(f(t),t),t) -> ts
d(f(t),t,2) | t=ts
f(ts)
```

permet de conclure que la fonction f admet un seul *maximum* en $t \approx 1,855$, de valeur $f(t) \approx 0,729$.

On constate que le taux d'alcoolémie ne dépasse pas le seuil de 0,8‰.

(b) Si la personne boit quatre verres de vin, l'expression analytique de f s'écrit

$$f(t) = \frac{44}{29,5} \cdot (1 - e^{-1,2t}) - 0,145t$$

On trouve par des calculs analogues à ceux de la question précédente que f admet un seul maximum pour $t \approx 2,094$, de valeur $f(t) \approx 1,067$. Cette fois-ci, le seuil est dépassé.