

1 Équations

1.1 Logarithmes

Exercice 1

1. Il existe plusieurs possibilités de résoudre cette équation :

– On peut utiliser les propriétés de \log_6

$$\begin{aligned} \log_6 x = \log_6(5) - 1 &\iff \log_6 x = \log_6 \frac{5}{6} \\ &\iff x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

– On peut aussi ramener \log_6 à \ln

$$\begin{aligned} \log_6 x = \log_6(5) - 1 &\iff \frac{\ln x}{\ln 6} = \frac{\ln 5}{\ln 6} - 1 \\ &\iff \ln x = \ln 5 - \ln 6 \\ &\iff x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

2. $x = 175$

3. Exprimons \log_2 et \log_4 à l'aide de \ln :

$$\begin{aligned} \log_2 x = \log_4 5 &\iff \frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{\ln 5}{2 \cdot \ln 2} \\ &\iff \ln x = \frac{1}{2} \cdot \ln 5 \\ &\iff x = \sqrt{5} \end{aligned}$$

4. $x - 1 = 2^3$

5. Condition : $x > 0$. L'équation s'écrit alors

$$\log_x(9 \cdot \sqrt{16}) = 2 \iff \ln(36) = \ln(x^2)$$

D'où l'unique solution : $x = 6$.

6. Condition : $x > 0$. Solution : $x = 16$.

7. Condition : $x > 0$. CHV : $\log_2 x = X$. L'équation auxiliaire

$$X^2 - 3X + 2 = 0$$

admet les solutions $X = 1$ et $X = 2$.

Il nous reste à résoudre les équations auxiliaires

$$\log_2 x = 1 \quad \text{et} \quad \log_2 x = 2$$

dont les solutions sont : $x = 2^1$ et $x = 2^2$.

8. Condition : $x > 0$. CHV : $\log_3 x = X$. L'équation auxiliaire

$$X^2 + 2X - 3 = 0$$

admet les solutions $X = 1$ et $X = -3$.

Nous devons donc résoudre les équations auxiliaires

$$\log_3 x = 1 \quad \text{et} \quad \log_3 x = -3$$

dont les solutions sont : $x = 3^1$ et $x = 3^{-3}$.

9. L'équation est équivalente à $x^2 - 3x + 3 = 1$.

10. Condition : $x > 5$. Transformation :

$$\begin{aligned} \log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} &= 1 \\ \iff \frac{1}{2} \log_3 (x-5) + \frac{1}{2} \log_3 (2x-3) &= 1 \\ \iff \log_3 [(x-5)(2x-3)] &= \log_3 (3^2) \\ \iff (x-5)(2x-3) &= 9 \end{aligned}$$

Solution : $x = 6$.

11. Condition : $x > 0$. Transformation :

$$\begin{aligned} \log_4 \log_3 \log_2 x = 0 &\iff \log_3 \log_2 x = 4^0 = 1 \\ &\iff \log_2 x = 3^1 = 3 \\ &\iff x = 2^3 \end{aligned}$$

12. Transformations :

$$\begin{aligned} \log_a \left(1 + \log_b \left(1 + \log_c \left(1 + \log_d x \right) \right) \right) &= \log_a 1 \\ \iff \log_b \left(1 + \log_c \left(1 + \log_d x \right) \right) &= 0 = \log_b 1 \\ \iff \log_c \left(1 + \log_d x \right) &= 0 = \log_c 1 \\ \iff \log_d x = 0 &= \log_d 1 \\ \iff x = 1 \end{aligned}$$

13. Transformations :

$$\begin{aligned} \log_4 \left(2 \cdot \log_3 \left(1 + \log_2 \left(1 + 3 \cdot \log_2 x \right) \right) \right) &= \log_4 2 \\ \iff 2 \cdot \log_3 \left(1 + \log_2 \left(1 + 3 \cdot \log_2 x \right) \right) &= 2 \\ \iff \log_3 \left(1 + \log_2 \left(1 + 3 \cdot \log_2 x \right) \right) &= 1 = \log_3 3 \\ \iff 1 + \log_2 \left(1 + 3 \cdot \log_2 x \right) &= 3 \\ \iff \log_2 \left(1 + 3 \cdot \log_2 x \right) &= 2 \\ \iff 1 + 3 \cdot \log_2 x &= 4 \\ \iff \log_2 x = 1 &\iff x = 2^1 \end{aligned}$$

14. L'équation donnée est équivalente au système

$$\begin{cases} x + 14 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ (x + 14) \cdot (x + 2) = 2^6 \end{cases}$$

Solution : $x = 2$.

15. Solution : $y = 5$.

16. Pour chaque réel x vérifiant les conditions

$$5 - x > 0, \quad 5 - x \neq 1, \quad 35 - x^3 > 0$$

l'équation donnée est équivalente à l'équation auxiliaire :

$$35 - x^3 = (5 - x)^3$$

Solutions : $x = 2$ et $x = 3$.

17. Solution : $x = 14$.

18. Solution : $x = 9$.

Exercice 2

1. Condition de définition : $x > -1$; pour chaque x vérifiant cette condition, l'équation est équivalente à

$$\log_4(x+1) = 1 \text{ ou } \log_4(x+1) = -1$$

D'où : $x = 3$ ou $x = -\frac{3}{4}$.

2. Pour chaque réel x vérifiant $x \neq 0$, l'équation est équivalente à

$$\begin{aligned} \log(x^2) &= 4 \text{ ou } \log(x^2) = -4 \\ \iff x^2 &= 10^4 \text{ ou } x^2 = 10^{-4} \\ \iff x &\in \{10^2, -10^2, 10^{-2}, -10^{-2}\} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc quatre solutions.

3. Pour $x > -1$, l'équation est équivalente à

$$2 \cdot \log^2(x+1) = 8$$

Solutions : $x = 99$, $x = -\frac{99}{100}$.

11. Pour chaque réel $x > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} 3 \cdot \log^2 x - 2 \cdot \log x^2 + 1 &= 0 \\ \iff 3 \cdot (\log x)^2 - 4 \cdot \log x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Le CHV : $X = \log x$ conduit à l'équation auxiliaire :

$$3 \cdot X^2 - 4 \cdot X + 1 = 0$$

dont les solutions sont $X = 1$ et $X = \frac{1}{3}$. D'où les solutions de l'équation principale : $x = 10$ et $x = \sqrt[3]{10}$.

Quelles seraient les solutions de l'équation

$$3 \cdot \ln^2 x - 2 \cdot \ln x^2 + 1 = 0$$

ou de l'équation

$$3 \cdot \log_a^2 x - 2 \cdot \log_a x^2 + 1 = 0$$

pour $a > 0$ et $a \neq 1$?

1.2 Puissances

Exercice 3

1. Transformation de l'équation :

$$2^{x^2} = 16 \iff 2^{x^2} = 2^4 \iff x^2 = 4$$

2. Transformation de l'équation :

$$4^x = \frac{1}{64} \iff 4^x = 4^{-3} \iff x = -3$$

3. L'équation équivaut à : $x^2 - x - 3 = -1$.

4. Le CHV : $X = 2^x$ nous ramène à l'équation auxiliaire :

$$X^2 - 3 \cdot X + 2 = 0$$

dont les solutions sont : $X = 2$ et $X = 1$.

Il nous reste à résoudre les équations (auxiliaires)

$$2^x = 2 \text{ et } 2^x = 1$$

dont les solutions sont $x = 1$ et $x = 0$.

5. Remarquons que $9^x = (3^x)^2$. Le CHV : $X = 3^x$ permet donc d'écrire l'équation auxiliaire

$$X^2 + 4X - 5 = 0$$

dont les solutions sont $X = 1$ et $X = -5$.

Il nous reste à résoudre les équations auxiliaires

$$3^x = -5 \text{ et } 3^x = 1$$

dont la première n'admet pas de solution tandis que la solution de la seconde est $x = 0$.

6. Le CHV : $X = 7^x$ permet d'écrire l'équation auxiliaire

$$7 \cdot X - \frac{X}{7} = 48$$

dont la solution est $X = 7$; donc $x = 1$.

7. CHV : $X = 3^x$.

8. CHV : $X = 3^x$; équation auxiliaire :

$$X^2 - 4X + 3 = 0$$

9. CHV : $X = 3^{x-1}$; équation auxiliaire :

$$3X^2 + 2X - 1 = 0$$

10. CHV : $X = 3^x$; équation auxiliaire :

$$X^2 + 2X + 1 = 0$$

L'équation principale n'admet aucune solution.

11. CHV : $X = 7^x$; équation auxiliaire :

$$49 \cdot X + \frac{4}{7} \cdot X = 347$$

12. CHV : $X = 4^x$; équation auxiliaire :

$$\frac{1}{4} \cdot X + 12 \cdot X = 196$$

13. CHV : $X = 3^{2x}$; équation auxiliaire :

$$\frac{X}{3} + 15 \cdot X = 138$$

14. CHV : $X = 4^{-x}$; équation auxiliaire :

$$4X - \frac{3}{4}X = 52$$

15. CHV : $X = 5^{-x}$; équation auxiliaire :

$$5X + 75X = 80$$

16. CHV : $X = 2^{2x}$; équation auxiliaire :

$$2X - \frac{7}{8}X = 72$$

21. Transformations :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3} &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^x} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-9} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{9-3x} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

de sorte que l'équation est équivalente à :
 $2x + (9 - 3x) = \frac{x}{2}$

22. Transformations :

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{12}\right)^x \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{5^x}{2^x \cdot 6^x} \cdot \frac{6^{x-1}}{5^{x-1}} &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2^x} \cdot \frac{5}{6} &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow x &= -2 \end{aligned}$$

23. Transformations :

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{x-1} &= \frac{40}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{5^x}{3^x} \cdot \frac{3^{x-1}}{10^{x-1}} &= \frac{40}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{5^x}{3^x} \cdot \frac{3^x}{10^x} \cdot \frac{10}{3} &= \frac{40}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2^x} &= 4 \end{aligned}$$

24. Transformations :

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{x+1} &= \frac{5}{2} \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^{-x-1} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2} &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

25. Transformations :

$$\begin{aligned} 2^{x+2} \cdot 3^{x-2} &= 16 \cdot 36^{x-2} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{9} \cdot 2^x \cdot 3^x &= 16 \cdot 6^{2x-4} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{9} &= 16 \cdot 6^{x-4} \\ \Leftrightarrow 6^{x-4} &= 6^{-2} \end{aligned}$$

26. Solution : $x = -1$

27. Transformations :

$$\begin{aligned} 9^x + 6^x &= 2^{2x+1} \\ \Leftrightarrow 3^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^{2x} &= 0 \quad | : 6^x \\ \Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{2^x \cdot 3^x} + \frac{2^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 3^x} - 2 \cdot \frac{2^{2x}}{2^x \cdot 3^x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \end{aligned}$$

Le CHV : $X = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ nous conduit à l'équation auxiliaire

$$X^2 + X - 2 = 0$$

dont l'unique solution positive est $X = 1$. Donc :
 $x = 0$.

28. Transformations :

$$\begin{aligned} 9 \cdot 4^{x-1} + 8 \cdot 9^{x-1} &= 3 \cdot 6^x \quad | : 6^x \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} &= 3 \end{aligned}$$

Le CHV : $X = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$ fournit l'équation auxiliaire

$$X + \frac{2}{X} = 3$$

dont les solutions sont $X = 1$ et $X = 2$. Nous devons résoudre donc les équations (auxiliaires)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = 2$$

La solution de la première équation est évidemment $x = 2$; la solution de la deuxième équation s'obtient par

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = 2 &\Leftrightarrow (x-2) \cdot \ln \frac{2}{3} = \ln 2 \\ \Leftrightarrow x &= 2 + \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln 3} \end{aligned}$$

29. Transformations :

$$\begin{aligned} 12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x &= 0 \quad | : 3^x \\ \Leftrightarrow 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Le CHV : $X = 2^x$ permet d'obtenir l'équation auxiliaire

$$X^2 - 6X + 8 = 0$$

dont les solutions (positives) sont $X = 2$ ainsi que $X = 4$.

Pour terminer, il suffit de résoudre les équations $2^x = 2$ et $2^x = 4$.

30. Transformations :

$$7 \cdot 9^x + 4 \cdot 21^x - 3 \cdot 49^x = 0 \quad | : 49^x$$

$$\iff 7 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{2x} + 4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x - 3 = 0$$

Le CHV : $X = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ nous fournit une équation auxiliaire du second degré dont l'unique solution positive est $X = \frac{3}{7}$. Notre équation admet donc l'unique solution $x = 1$.

31. Transformations :

$$7 \cdot 25^x + 2 \cdot 35^x - 5 \cdot 49^x = 0 \quad | : 49^x$$

$$\iff 7 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^x - 5 = 0$$

Exercice 4

1. Divisez par 81^x .

2. Divisez par 6^x .

3. Transformations :

$$3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x = 17 \cdot 2^{2x+2}$$

$$\iff 81 \cdot (3^x)^2 + 45 \cdot 6^x = 68 \cdot (2^x)^2 \quad | : 6^x$$

$$\iff 81 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 45 = 68 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Le CHV : $X = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ conduit à l'équation auxiliaire

$$81 \cdot X^2 + 45 \cdot X - 68 = 0$$

dont l'unique solution positive est

$$X = \frac{3\sqrt{33} - 5}{18}$$

Solution de l'équation principale :

$$\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3\sqrt{33} - 5}{18} \right) = \frac{\ln \frac{3\sqrt{33} - 5}{18}}{\ln \frac{3}{2}}$$

4. Divisez par 27^x .

5. Divisez par 27^x .

6. Divisez par 9^x .

7. Divisez par $9^{-\frac{1}{x}}$.

8. Divisez par 6^{2x} .

9. Divisez par 64^x .

10. Divisez par 3^x .

18. L'équation est équivalente à

$$\frac{1}{9} \cdot (3^{x^2})^2 - \frac{4}{3} \cdot 3^{x^2} + 3 = 0$$

Effectuez ensuite le CHV : $X = 3^{x^2}$.

19. Remarquons que l'équation est équivalente, pour $x \geq 5$, à

$$(3^{\sqrt{x-5}})^2 - 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}} - 27 = 0$$

Le CHV : $X = 3^{\sqrt{x-5}}$ nous donne l'équation auxiliaire

$$X^2 - 6X - 27 = 0$$

dont l'unique solution strictement positive est $X = 9$. Il nous reste à résoudre l'équation auxiliaire

$$3^{\sqrt{x-5}} = 9 = 3^2$$