1. (a) Il s'agit de déterminer les *maximums* de la fonction f, s'ils existent. Comme f admet en t un maximum si $f'(t) = 0$ et $f''(t) < 0$, le code

Condition suffisante

```
20 t e^(−0.5t) ⟶ f(t)
d(f(t),t) ⟶ df(t)
d(f(t),t,2) ⟶ d2f(t)
zeros(df(t),t) ⟶ ts
f(ts)
d2f(ts)
```

permet de conclure que la concentration est *maximale* à l'instant $t_0 \approx 2$ (c'est-à-dire 2 heures après la prise du médicament) et que la concentration maximale vaut $f(t_0) \approx 14{,}72$ mg/l.

(b) Le médicament est *efficace* au moment t si $f(t) > 5$: la traduction voyage 200 de cette idée

```
solve(f(t)>5,t)
```

ne permet pas de répondre à la question. Essayons de procéder autrement : le *signe* de $f(t) - 5$ est *constant* sur chacun des intervalles délimités par les zéros de $f(t) - 5$. L'expression

À cause de la continuité de $f(t) - 5$

```
zeros(f(t)−5,t)
```

nous fournit les zéros $t_1 \approx 0{,}29$ et $t_2 \approx 6{,}52$ de $f(t) - 5$ (arrondis au centième près).

En utilisant des points-témoins dans chacun des trois intervalles $]0; t_1[$, $]t_1; t_2[$, $]t_2; 20[$ pour déterminer le signe de $f(t) - 5$, nous pouvons enfin affirmer que le médicament est efficace entre 0,29 h et 6,52 h.

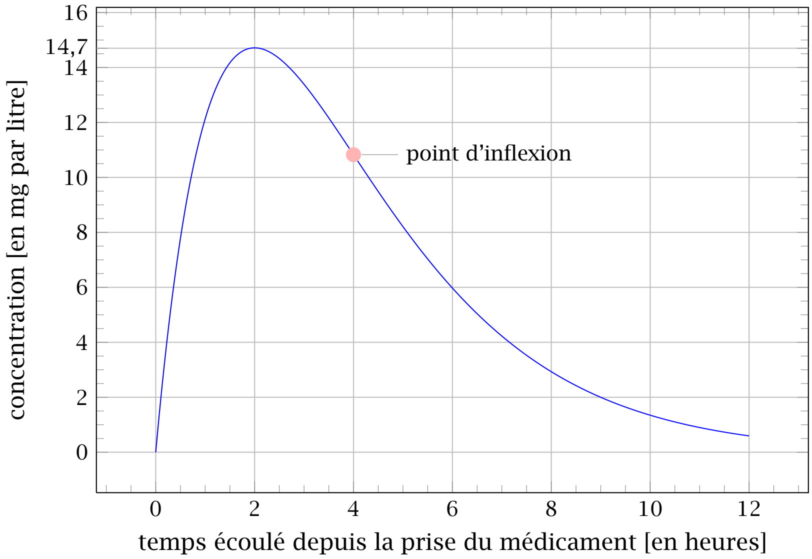
(c) Les *variations* de la concentration du médicament sont décrites par la fonction f'. Nous devons déterminer le moment où la concentration diminue le plus fortement, en d'autres mots : les *minimums* (s'ils existent) de f'. Or f' admet en t un minimum si $(f')'(t) = 0$ et $(f')''(t) > 0$.

Condition suffisante

Le code

```
zeros(d2f(t),t) ⟶ ts
d(df(t),t,2) | t=ts
df(ts)
```

montre que f' admet effectivement en $t \approx 4$ un minimum et que 4 heures après la prise du médicament, la concentration de celui-ci diminue avec une vitesse de 2,71 mg/l par heure.

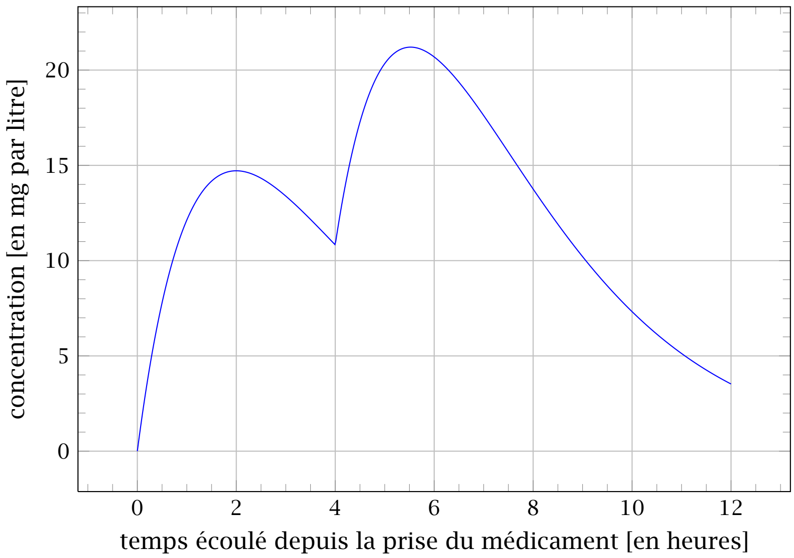


Remarquons que $t = 4$ est l'abscisse du point d'inflexion de f.

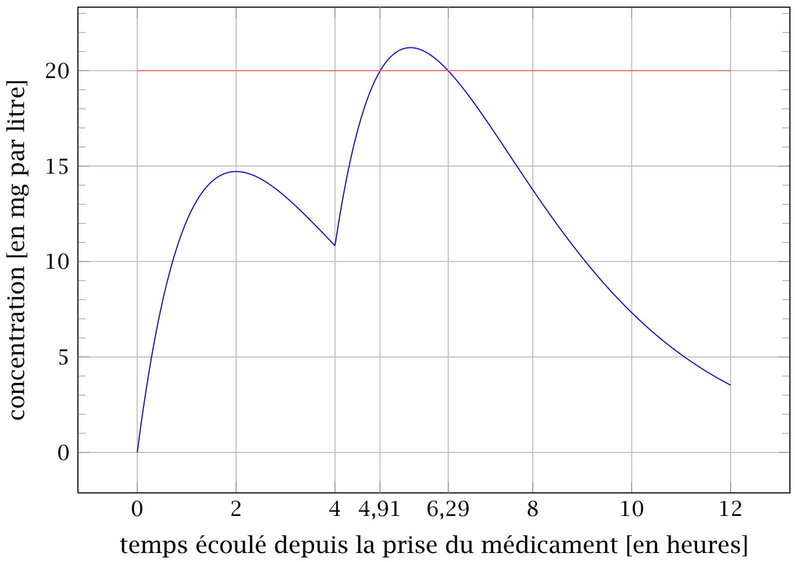
2. (a) La fonction k qui représente la concentration totale du médicament dans le sang est donnée par

$$k(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ f(t) + f(t-4) & \text{si } 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

Voici sa représentation graphique :



(b) Le graphique précédent montre immédiatement que cette directive n'est pas respectée :



Le code

```
zeros(k(t)−20,t)
```

montre que le dépassement a lieu entre les instants 4,91 h et 6,29 h (arrondis au centième).

3. (a) La fonction g doit vérifier les conditions *nécessaires*

$$g(4) = 14, \qquad g'(4) = 0$$

Le code

```
a∗t∗e^(−b∗t) ⟶ j(t)
d(j(t),t) ⟶ dj(t)
{j(4)=14, dj(t)=0} ⟶ conds
solve(conds, {a,b}) ⟶ paras
j(t) | paras ⟶ g(t)
```

nous fournit les valeurs de nos paramètres

$$a = \tfrac{7}{2}\,\mathrm{e}, \qquad b = \tfrac{1}{4}$$

et partant l'expression analytique de g :

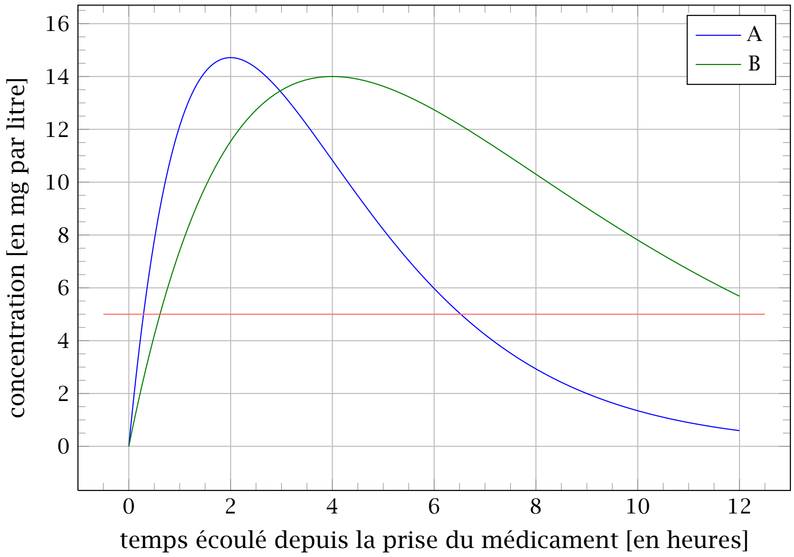
$$g(t) = \tfrac{7}{2}\, t\, \mathrm{e}^{1-\frac{1}{4}t}$$

Il nous reste à vérifier que g admet bien en $t = 4$ un *maximum* : le code

```
(d(g(t),t,2) | t = 4) < 0
```

confirme que $g''(4) < 0$.

4. Comparons les périodes pendant lesquelles les deux médicaments sont efficaces :
   - nous savons déjà que le médicament **A** est efficace entre 0,29 h et 6,52 h
   - un calcul analogue montre que **B** est efficace entre 0,61 h et 12,76 h, ce qui est un intervalle de temps nettement plus long.


A
B
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
concentration [en mg par litre]
temps écoulé depuis la prise du médicament [en heures]