# Devoir I, 2

*le 24 novembre 2009*

## Question 1

Soit le système

$$\begin{cases} ax - y + z = -2 \\ 2x + y + 3z = -3a \\ ax + 2y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

**1°** Montrez que le système est cramérien si et seulement si $a \neq \frac{2}{3}$.

**2°** Résolvez, discutez et interprétez géométriquement le système suivant la valeur du paramètre $a$.

## Question 2

Dans un repère orthonormé de l'espace on considère la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

**1°** Précisez les coordonnées d'un point $A$ et celles d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $d$.

**2°** Déterminez un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes de la doite $d'$ passant par le point $B(1;0;2)$ et parallèle à la droite $d$.

**3°** Déterminez une équation cartésienne du plan $\Pi$ comprenant le point $B$ et contenant la droite $d$.

## Question 3

Dans un repère orthonormé de l'espace on considère le plan $\Pi$, la droite $g$ et le point $A$ :

$$\Pi \equiv x - 2y - z = 8\,, \qquad g \equiv \begin{cases} x - y = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}, \qquad A(-1;-2;1)$$

**1°** Soit $d$ la droite passant par $A$ et orthogonale au plan $\Pi$.
Déterminez les coordonnées du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $\Pi$.

**2°** Déterminez une équation cartésienne du plan $\Pi'$ passant par $A$ et contenant la droite $g$.

## Question 4

**1°** Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$P(z) = z^3 - 2\mathrm{i} \cdot z^2 + (3 + 4\mathrm{i}) \cdot z + 8 - 6\mathrm{i} = 0$$

sachant que $P$ admet une racine imaginaire pure.

**2°** On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} + 6\mathrm{i})^2}{(\sqrt{3} + 3\mathrm{i})^3} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}}$$

(a) Écrivez $z_1$ et $z_2$ sous forme algébrique et puis sous forme trigonométrique.

(b) Écrivez $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$ sous forme algébrique et trigonométrique.

(c) Déduisez des calculs précédents les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

**Répartition des points: 15+15+15+15 = 60.**