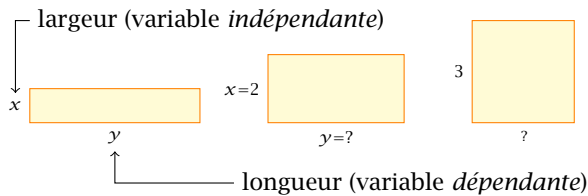


1 La notion de fonction

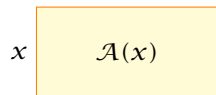
Exercice 1

Nous nous proposons d'étudier les rectangles que l'on peut construire à l'aide d'un fil de longueur 12 cm :



Chacun de ces rectangles peut être décrit par deux variables : la largeur, notée x , et la longueur, y . Mais nous constatons immédiatement que ces deux variables ne sont pas *indépendantes*, puisqu'elles doivent vérifier une contrainte.

1. Exprimez l'aire du rectangle *en fonction* de x . Nous allons noter \mathcal{A} la *fonction* ainsi définie.



2. Construisez un *tableau des images* pour \mathcal{A} :

| | | | | | | | |
|------------------|-----|---|-----|---|-----|-----|---|
| x | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | ... | 6 |
| $\mathcal{A}(x)$ | | | | | | | |

où x représente la largeur (en cm) d'un rectangle.

Décrivez alors la *sens de variation* de \mathcal{A} .

3. Déterminez la *représentation graphique* de la fonction \mathcal{A} .
4. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle *maximale*?
Démontrez votre conjecture.

Exercice 2

Considérons un problème analogue en étudiant les variations du périmètre des rectangles d'aire 9 cm^2 .

1. Notons $\mathcal{P}(x)$ le *périmètre* d'un rectangle de largeur $x \text{ cm}$ et d'aire 9 cm^2 .
Construisez pour la *fonction* \mathcal{P}
- un *tableau des images*
- une *représentation graphique*.
2. En quelle valeur de x la fonction \mathcal{P} admet-elle un *minimum*?
Démontrez votre conjecture.

Exercice 3

1. Un rectangle a un périmètre de 20 m. Exprimez l'aire du rectangle comme *fonction* de la longueur d'un des côtés.

2. Un rectangle a une aire de 16 m^2 . Exprimez son périmètre comme *fonction* de la longueur d'un des côtés.

Exercice 4

Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on dispose d'une feuille de carton fort qui est un carré de 30 cm de côté ; on découpe 4 coins carrés de côté $x \text{ cm}$.



1. À quel intervalle appartient x ?
2. Calculez $V(x)$, le volume de la boîte, *en fonction* de x .
3. Construisez
- un *tableau des images*
- une *représentation graphique* de V .
Quel est donc le *sens de variation* de V ?
4. Afin de pouvoir *comparer* $V(x)$ et $V(5)$, nous nous proposons d'étudier le *signe* du *polynôme* $V(x) - V(5)$.

Vérifiez que l'on a la *factorisation*

$$V(x) - V(5) = 4 \cdot (x - 5)^2 \cdot (x - 20)$$

5. En déduire que le volume est *maximal* pour $x = 5$.

Exercice 5

Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on dispose d'une feuille de carton fort qui est un rectangle de dimensions $80 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$; on découpe 4 coins carrés de côté $x \text{ cm}$.

1. À quel intervalle appartient x ?
2. Calculez $V(x)$, le volume de la boîte *en fonction* de x .
3. Construisez un *tableau des images* de V .
4. Pour quelle valeur de x le volume est-il *maximal*? Notons cette valeur α .
5. Démontrez votre assertion en
- *factorisant* le polynôme $V(x) - V(\alpha)$
- *étudiant le signe* de ce polynôme factorisé.

Exercice 6

Une des conséquences du réchauffement de notre planète est la fonte des glaces de certains glaciers. Douze ans après la disparition de la glace, de minuscules plantes — appelées lichens — font leur apparition sur les rochers. Au long de sa croissance, chaque lichen se développe à peu près en forme de cercle. La *relation* entre le diamètre de ce cercle et l'âge du lichen peut être calculée de manière approximative par la formule :

$$d = 7 \cdot \sqrt{t - 12} \quad \text{pour } t \geq 12$$

où d est le diamètre du lichen en millimètres et t le nombre d'années écoulées après la disparition de la glace.

1. En utilisant la formule, calculez le diamètre du lichen, 16 ans après la disparition de la glace.
2. En considérant d comme fonction de t , déterminez le *domaine d'existence* et le *domaine des valeurs* de cette fonction.
3. Aliénor a mesuré le diamètre d'un lichen et a trouvé 35 mm. Depuis combien d'années la glace a-t-elle disparu à cet endroit précis ?

Exercice 7

Nous savons depuis GALILÉE et NEWTON que la *chute libre* d'un corps abandonné sans vitesse initiale est décrite (approximativement) par

$$d = 4,95 \cdot t^2$$

où d est la distance (exprimée en m) parcourue par le corps pendant le temps t (exprimé en s).

1. Déterminez la distance parcourue par une pierre dont la chute dure 8 s.
2. Complétez le tableau des images :

| | | | | | |
|-----|---|---|---|----|----|
| t | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| d | | | | | |

3. Déterminez la durée de la chute d'un corps tombé d'une hauteur de 20 m.
4. Complétez le tableau des images :

| | | | | |
|-----|----|----|----|----|
| d | 10 | 20 | 40 | 80 |
| t | | | | |

2 Fonctions affines

Exercice 8

Je prends l'avion pour New-York, et à l'aéroport on annonce une température au sol de 32 degrés. Je m'interroge, car je vois de la neige sur la piste ! Je me rappelle alors que les anglo-saxons utilisent un système de mesure différent du nôtre pour les températures. Leur unité de mesure est le degré Fahrenheit, noté °F.

Je trouve le tableau suivant qui donne la correspondance entre les deux unités de mesure.

| | | | | | | | | |
|----|-----|-----|----|----|----|----|-----|-----|
| °C | -20 | -10 | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| °F | -4 | 14 | 32 | 50 | 68 | 86 | 104 | 122 |

1. Indiquez la représentation graphique.
2. Exprimez, en degrés Fahrenheit, la température à laquelle la glace fond ainsi que la température d'ébullition de l'eau.

3. Soit x la mesure en degré Celsius et y la mesure en degré Fahrenheit. Trouver la formule qui permet d'exprimer y en fonction de x .
4. Le titre du célèbre roman de science-fiction, Fahrenheit 451, fait allusion à la température à laquelle brûle le papier. Quelle est cette température en degré Celsius ?
5. Existe-t-il une valeur de la température pour laquelle la mesure donne le même nombre dans les deux systèmes ?
6. Trouvez également la formule qui permet de calculer x en fonction de y .

Exercice 9

Une société de location de voitures propose, pour un week-end, un tarif de 110€, auquel on ajoute 0.25€ par kilomètre parcouru.

1. Complétez le tableau suivant :

| | | | |
|-------------------------|-----|-----|-----|
| distance parcourue (km) | 200 | 340 | 400 |
| prix de la location (€) | | | 295 |

2. Si l'on désigne par x le nombre de kilomètres parcourus en un week-end, exprimez le prix $p(x)$ de la location en fonction de x .

Exercice 10

Le montant total d'une facture d'eau s'obtient en ajoutant deux nombres :

- l'abonnement fixe
- le montant de la consommation, proportionnel au nombre de mètres cubes consommés.

1. Complétez la facture ci-dessous :

| | |
|---------------------------------|--------|
| Abonnement (6 mois) | 11.20€ |
| Prix unitaire du m ³ | 2.60€ |
| Consommation en m ³ | 38 |
| Montant consommation | |
| Montant total facturé | |

2. Si l'on désigne par x le nombre de mètres cubes consommés, exprimez le montant total et la facture en fonction de x .
3. La famille Tournesol a payé un montant total de 149€. Quelle quantité d'eau a-t-elle consommé ?

Exercice 11

In einer Badewanne befinden sich 105 Liter Wasser. Nachdem der Stöpsel herausgezogen wurde, fließen pro Minute 18 Liter Wasser durch den Ausguss ab.

1. Zeichne den *Graphen* der Zuordnung *Zeit* \mapsto *Wassermenge* in der Wanne.

2. Gib die Zuordnungsvorschrift an.
3. Berechne die Zeitdauer in Minuten und Sekunden, bis die Wanne leer ist.

Exercice 12

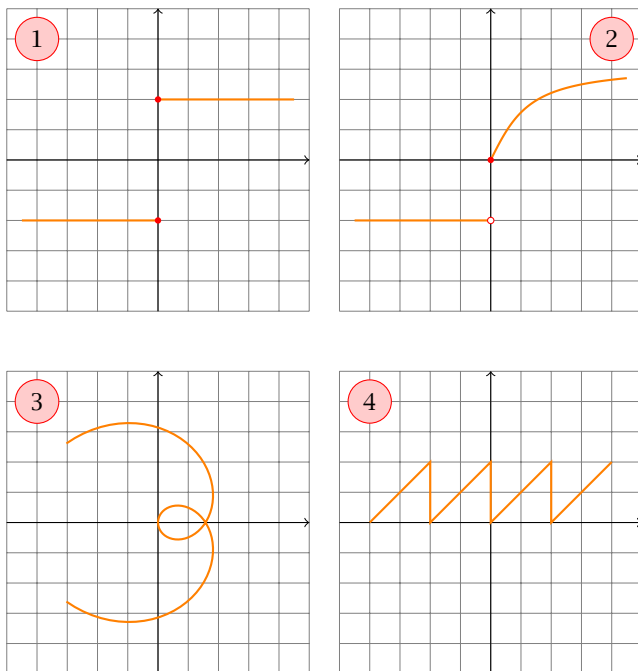
10 Minuten nach Beginn eines Regenschauers befinden sich 20 Liter Wasser in einer Regentonne. Jeweils in 3 Minuten nimmt die Wassermenge um 1 Liter zu.

1. Zeichne den Graphen der Zuordnung *Zeit nach Beginn des Schauers* (in Minuten) \rightarrow *Wassermenge* (in Litern) in ein geeignetes Koordinatensystem.
2. Berechne die Wassermenge, die zu Beginn des Schauers bereits in der Tonne war.
3. Gib die Zuordnungsvorschrift an.
4. Die Tonne fasst 50 Liter. Wie lange müsste der Regenschauer dauern, damit die Tonne überläuft?

3 Analyse géométrique d'une représentation graphique

Exercice 13

Est-ce que tout graphique représente une fonction? Parmi les graphiques proposés, quels sont ceux d'une fonction?



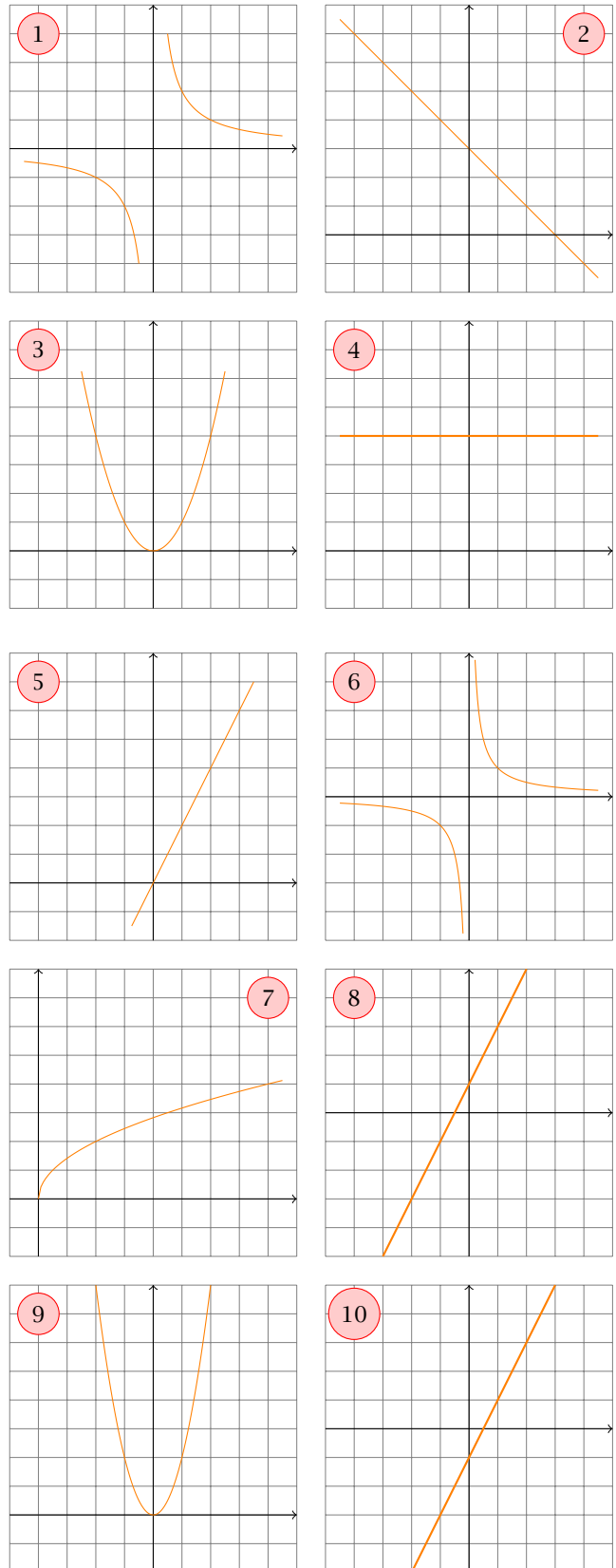
Exercice 14

Indiquez pour chacune des expressions analytiques suivantes le graphe correspondant :

$$f(x) = 2x^2 \quad j(x) = \frac{2}{x} \quad m(x) = -x + 1$$

$$h(x) = 2x + 1 \quad k(x) = 2x \quad n(x) = \frac{1}{x}$$

$$i(x) = \sqrt{x} \quad l(x) = x^2 \quad o(x) = 2$$

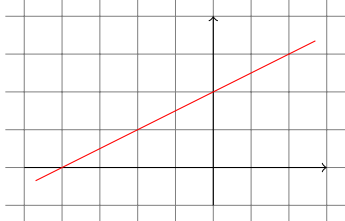


Exercice 15

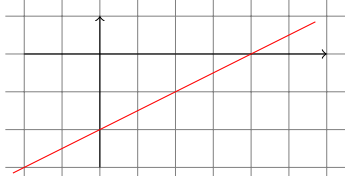
Nous allons considérer quelques *fonctions affines* données par leurs graphes (relativement à un *repère orthonormé*).

Déterminez la *pente*, l'*ordonnée à l'origine* et l'*expression analytique* des droites représentées ci-dessous.

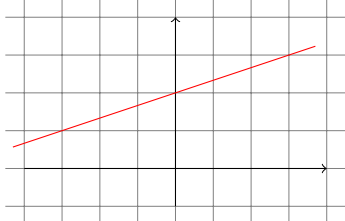
1.



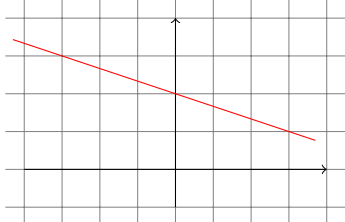
2.



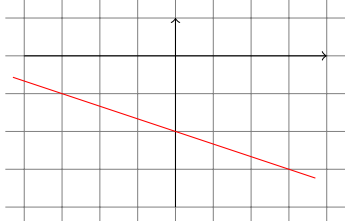
3.



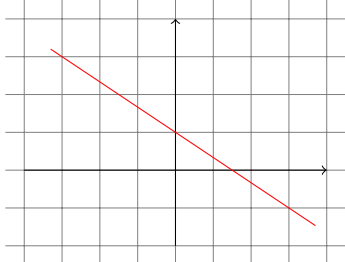
4.



5.



6.



4 De l'expression analytique vers la représentation graphique

Exercice 16

Déterminez la *pente* et l'*ordonnée à l'origine* des *fonctions affines* suivantes :

1. $f(x) = 2x - 3$

2. $f(x) = 3 - 2x$

3. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

4. $f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cdot x$

5. $f(x) = 2 \cdot (x - 1) + 3$

6. $f(x) = 2$

Représentez ces fonctions relativement à un repère orthonormé.

Exercice 17

Considérons la *fonction affine* $f : x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x + 1$.

1. Représentez f relativement à un *repère orthonormé*.
2. Déterminez son *coefficient directeur* et son *ordonnée à l'origine*.
3. Déterminez l'*image* de $x = 2, 5$.
4. Déterminez l'*antécédent* de $y = 2, 5$.

5 Intersections

Exercice 18

Le prix d'un parcours en taxi de la société **A** est la somme de deux termes :

- la prise en charge : 4 €
- le prix par km : 2 €.

1. Calculez le prix d'un trajet de 28 km si nous faisons appel aux services de la société **A**.
2. Notons $A(x)$ le prix d'un trajet de x kilomètres. Déterminez l'*expression analytique* de la *fonction* A .
3. Un client doit payer 28 €. Quelle est la longueur de son trajet ?
4. Déterminez l'*expression analytique* de A^{-1}

Le prix d'un parcours en taxi de la société **B** est la somme de deux termes :

- la prise en charge : 1 €
- le prix par km : 2,5 €.

1. Notons $B(x)$ le prix (relatif à cette société **B**) d'un trajet de x kilomètres. Déterminez l'*expression analytique* de la *fonction* B .
2. Afin de mieux comparer les deux offres, représentez graphiquement les deux *fonctions* précédentes. Quelle est la société (**A** ou **B**) que vous préférez ?

Exercice 19

Voici les tarifs proposés par trois hôtels dans une station de sports d'hiver :

- hôtel 1 : 100 € par jour, tout compris
- hôtel 2 : supplément fixe de 150 € (remontées mécaniques etc.), puis 50 € par jour ;
- hôtel 3 : supplément fixe de 350 € (remontées mécaniques etc.), puis 25 € par jour.

1. Pour chacun des trois arrangements, exprimez le prix y en fonction du nombre de jours x .
2. Représentez les trois fonctions graphiquement sur une même figure.
3. Selon les valeurs du nombre de jours x , lequel des trois hôtels est le plus avantageux ?

Exercice 20

Die Bahnhöfe A und B sind 103 km weit voneinander entfernt. Ein Eilzug verläßt um 9.00 Uhr Bahnhof A und fährt mit durchschnittlich 85 km pro Stunde in Richtung Bahnhof B. Von dort startet 20 Minuten später ein D-Zug mit durchschnittlich 113 km pro Stunde in Gegenrichtung.

1. Bestimme *graphisch*, wann und wo sich die beiden Züge begegnen. Wähle dazu die Einheiten so, daß eine möglichst hohe Genauigkeit erreicht wird.
2. Stelle die zugehörigen *Funktionen* auf.

Exercice 21

Considérons les *fonctions affines* $f : x \mapsto -x + 2$ et $g : x \mapsto 2x - 1$.

1. Représentez ces fonctions f et g dans le même repère.
2. Déterminez *graphiquement* les coordonnées du *point d'intersection* des graphes Γ_f et Γ_g .
3. Déterminez *algébriquement* les coordonnées du point d'intersection des graphes Γ_f et Γ_g .

Exercice 22

Considérons les *fonctions affines* $f : x \mapsto 2x - 1$ et $g : x \mapsto -3x + 2$.

1. Représentez ces fonctions f et g dans le même repère.
2. Déterminez les coordonnées du *point d'intersection* des graphes Γ_f et Γ_g .

6 Problèmes d'interpolation et d'extrapolation**Exercice 23**

Pour chacun des tableaux ci-dessous, étudiez s'il s'agit d'un tableau des images d'une fonction affine.

| | | | | | | |
|----|--------|---|----|----|-----|-----|
| 1. | x | 2 | 4 | 10 | 14 | 22 |
| | $f(x)$ | 9 | 25 | 73 | 105 | 169 |

| | | | | | | |
|----|--------|----|----|----|----|----|
| 2. | x | -7 | -4 | 2 | 11 | 23 |
| | $f(x)$ | 1 | 5 | 13 | 25 | 40 |

Exercice 24

Complétez les tableaux suivants pour qu'ils soient des tableaux de valeurs de fonctions affines.

| | | | | | |
|----|--------|----|---|---|---|
| 1. | x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | $f(x)$ | 11 | 7 | | |

| | | | | | |
|----|--------|----|---|---|---|
| 2. | x | -2 | 0 | 2 | 6 |
| | $f(x)$ | -3 | 2 | | |

Exercice 25

Déterminez l'*expression analytique* de la fonction *affine* f dont l'ordonnée à l'origine vaut 3 et dont la *pente* vaut -2 .

Exercice 26

On sait que f est une fonction affine. Déterminez l'*expression analytique* de la fonction f en supposant que $f(-4) = 3$ et que la *pente* vaut -2 .

Exercice 27

Calculez la *pente* de la *fonction affine* f telle que

1. $f(-1) = 2$ et $f(1) = 4$
2. $f(1) = 2$ et $f(-1) = 4$
3. $f(-2) = 2$ et $f(2) = 4$
4. $f(0) = 2$ et $f(-2) = 4$

Exercice 28

Déterminez l'*expression analytique* de la *fonction affine* f telle que :

1. $f(2) = 5$ et $f(7) = -10$
2. $f(-2) = -4$ et $f(+2) = 8$

Exercice 29

Soit f une *fonction affine*. Résolvez les *problèmes d'interpolation et d'extrapolation* suivants.

1. Calculez $f(0)$ sachant que $f(-1) = 1$ et $f(1) = 5$.
2. Calculez $f(3)$ sachant que $f(-1) = 2$ et que la *pente* de f vaut $+2$.
3. Calculez $f(-2)$ si $f(-3) = 0$ et $f(3) = 6$.

Exercice 30

Soit f une fonction affine. Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = 3$ sachant que

1. $f(-2) = -5$ et $f(4) = 7$;
2. $f(1) = -1$ et que la pente de f vaut -3 ;
3. $f(-2) = -3$ et $f(0) = 1$.

Exercice 31

Soit f une fonction affine.

Déterminez $f^{-1}(2)$ sachant que f vérifie : $f(-4) = 3$ et $f(4) = 1$

Exercice 32

Soit f une fonction affine.

Déterminez $f^{-1}(2)$ sachant que $f(-2) = 5$ et que la pente de f est -3 .

Exercice 33

Considérons la fonction affine f telle que $f(-2) = -4$ et que $f(4) = -1$.

Déterminez $f^{-1}(7)$.

7 Fonctions affines par morceaux

Exercice 34

Représentez, relativement à un repère orthonormé, les fonctions affines par morceaux suivantes ; examinez si les fonctions sont paires ou impaires.

1. $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto |x|$
2. $f : x \mapsto x - 1$, $g : x \mapsto |x - 1|$
et $h : x \mapsto |x| - 1$
3. $f : x \mapsto x + 1$, $g : x \mapsto |x + 1|$
et $h : x \mapsto |x| + 1$

Exercice 35

Représentez graphiquement les fonctions suivantes et indiquez celles qui sont paires ou impaires.

1. $f : x \mapsto |x + 1| + |x - 1|$
2. $f : x \mapsto |x + 1| - |x - 1|$
3. $f : x \mapsto \left| |x + 1| - |x - 1| \right|$
4. $f : x \mapsto \left| |x + 1| - |x| + |x - 1| \right|$
5. $f : x \mapsto \left| |x + 1| + |x| - |x - 1| \right|$