

1 Opérations élémentaires

Exercice 1

Développez les expressions suivantes ; ordonnez les polynômes suivant les puissances décroissantes de x .

- $(2x^2 + x + 1) \cdot (-9x^2 + 5x - 4)$
- $(x^3 + 2x - 5)^2$
- $(x^4 + x + 1) \cdot (x^6 - 1) - (x^{10} + 1)$

Exercice 2

Déterminez la *forme réduite* et le *degré* des polynômes définis de la façon suivante :

- $A(x) = (x^2 - 1)^2 - (x^2 + x)^2$
- $B(x) = (x + 2)^3 \cdot (x - 2)$
- $C(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

Exercice 3

Réduisez les polynômes suivants :

- $(\sqrt{3} - \sqrt{2}x) \cdot \frac{7}{5} \cdot \sqrt{12}x^2$
- $(2\sqrt{6}x^2 + 3\sqrt{3}x) \cdot (3\sqrt{3}x - 2\sqrt{6}x^2)$
- $(3\sqrt{2}x^3 - \frac{2}{3}x^2)^2$
- $(x^3 + x^2) \cdot (\sqrt{5}x^2 - \sqrt{5}x^3)$

Exercice 4

Déterminez le *terme dominant* (le terme de plus haut degré) et le *terme constant* des polynômes suivants :

- $(2x - 1)^2$
- $(2x - 1) \cdot (6x - 5)$
- $(2x - 1)^2 \cdot (x + 2x^2)$
- $(2x + 3) \cdot (2x - 3)^2$
- $(x^2 + 1) \cdot (2x + 3) \cdot (3x + 4)$

Exercice 5

Évaluez le polynôme P en α (c'est-à-dire calculez le nombre $P(\alpha)$) :

	$P(x)$	α
1.	$4x^2 - 2x - 6$	3
2.	$x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	-2
3.	$2x^3 - x + 2$	1
4.	$x^3 + 4x^2 - 4x + 5$	-5
5.	$2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$	-3

2 Division euclidienne

Exercice 6

Effectuez la *division euclidienne* de $A(x)$ par $B(x)$ (en précisant le *quotient* $Q(x)$ et le *reste* $R(x)$).

- $A(x) = 30x^2 + 17x + 2;$
 $B(x) = 6x + 1$
- $A(x) = 15x^3 + 36x^2 + 12x - 2;$
 $B(x) = 3x^2 + 6x + 1$
- $A(x) = 21x^4 + 57x^3 + 43x^2 + 17x - 2;$
 $B(x) = 7x^2 + 5x + 2$
- $A(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1;$
 $B(x) = 2x^2 - 3x + 1$
- $A(x) = 8x^4 - 14x^3 + 5x^2 - 8x - 3;$
 $B(x) = 4x^2 - x + 3$
- $A(x) = 18x^4 - 45x^3 + 34x^2 + 5x - 20;$
 $B(x) = 6x^2 - 5x - 5$
- $A(x) = 28x^5 - 29x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 17x + 7;$
 $B(x) = 4x^2 - 3x + 2$
- $A(x) = 21x^7 - 28x^6 + x^5 + \frac{27}{2}x^4 + 7x^3 + 4x^2 - \frac{15}{2}x + 9;$
 $B(x) = 7x^3 - 2x + 3$
- $A(x) = 16x^7 - 40x^3 + 17x^2 + 10x + 1;$
 $B(x) = 4x^3 - 5x - 1$

3 Racines d'un polynôme

Exercice 7

Déterminez si le nombre α est *racine* du polynôme P .

	$P(x)$	α
1.	$4x^3 + 2x^2 - 3x + 18$	-2
2.	$2x^2 - x - 6$	$-\frac{3}{2}$
3.	$x^2 - 2x - 1$	$1 + \sqrt{2}$
4.	$4x^2 - 4x - 1$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Exercice 8

Quels sont les *zéros* (les *racines*) des polynômes suivants ?

- $(x + 2) \cdot (x - 2)$
- $9x^2 - 16$
- $(x + \sqrt{3})^2$
- $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$
- $x^2 + x - 6$
- $(x^2 + x - 6)(2x - 1)$
- $x^2 - 4x - 5$
- $x^2 - x - 6$
- $x^2 - 3x + 2$
- $2x^2 + 3x - 2$

Exercice 9

Déterminez deux polynômes du *troisième degré* ayant :

1. pour racines 2, 5 et -3
2. pour seules racines 2 et 5
3. pour seule racine 2

Exercice 10

Déterminez un polynôme P à coefficients entiers dont $x = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ est une racine.

4 Loi du reste — Le schéma de Horner

Exercice 11

Calculez $P(\alpha)$ et le reste de $P(x)$ dans la division euclidienne par $x - \alpha$. Qu'est-ce que vous observez ?

	$P(x)$	α
1.	$4x^2 - 2x - 6$	3
2.	$x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	-2
3.	$2x^3 - x + 2$	1
4.	$x^3 + 4x^2 - 4x + 5$	-5
5.	$2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$	-3

Exercice 12

Effectuez la *division* de P par Q à l'aide du *schéma de Horner*.

	$P(x)$	$Q(x)$
1.	$x^4 - 3x^2 + 5x - 3$	$x - 1$
2.	$3x^3 - 8x + 5$	$x - 1$
3.	$2x^3 - 4x^2 + 5x - 10$	$x - 2$
4.	$2x^3 - 4x^2 + 5x - 10$	$x + 2$

Exercice 13

Considérons le polynôme

$$P(x) = ax^4 + bx^3 - 8x^2 - 4x + 5$$

1. Déterminez a et b pour que le polynôme $P(x)$ soit divisible par $x - 1$ et par $x + 1$.
2. Factorisez le polynôme obtenu.

Exercice 14

Remplacez les binômes $x - 1$, $x - 2$, $x + 1$ et $x + 2$ dans le tableau ci-dessous :

		$x^2 + x - 2$
		$x^2 - x - 2$
$x^2 - 3x + 2$	$x^2 + 3x + 2$	

les produits des binômes étant donnés en bout de ligne et en bout de colonne.

Exercice 15

Déterminez *une* racine des polynômes suivants.

1. $3x^3 - 11x^2 + 9x - 1$
2. $2x^5 - 7x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 6x$
3. $x^3 - 3x^2 - 9x + 2$
4. $7x^3 + 6x^2 + x$
5. $-21x^4 - 5x^3 + 26x^2 + 5x - 5$
6. $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5$
7. $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 4$
8. $x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 12x - 9$
9. $8x^6 - 27$

5 Fractions algébriques

5.1 Opérations

Exercice 16

On donne deux fractions rationnelles. Calculez

- leur *somme*
- leur *différence*
- leur *produit*
- leur *quotient*

Précisez leurs *conditions d'existence*.

1. $\frac{x-2}{5}$ et $\frac{x+3}{10}$
2. $\frac{x+y}{x}$ et $\frac{x+y}{2x}$
3. $\frac{x-y}{x}$ et $\frac{x+y}{y}$
4. $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$
5. $\frac{x+y}{x-y}$ et $\frac{x-y}{x+y}$
6. $\frac{5}{a-2}$ et $\frac{2}{-a+2}$

5.2 Simplifications

Exercice 17

Pour les fractions suivantes :

- indiquez leurs *conditions d'existence*
- *simplifiez-les*.

1. $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$
2. $\frac{2x^2 + 3x - 2}{4x^2 - 1}$
3. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4}$
4. $\frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$
5. $\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 2x - 3}$
6. $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x - 2}$
7. $\frac{4x^3 + 8x^2 - 9x - 18}{2x^2 + 7x + 6}$
8. $\frac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 - 3x - 2}$
9. $\frac{2x^2 - 13x - 7}{4x^2 + 4x + 1}$
10. $\frac{x^3 + x^2 - 14x - 24}{x^2 - 2x - 8}$

5.3 Équations

Exercice 18

Résolvez les *équations* suivantes en réduisant d'abord au même dénominateur.

1. $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{35}$
2. $\frac{4}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1} + 1$
3. $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x-1}{x-3} = \frac{25}{12}$
4. $\frac{2x-1}{3} + \frac{3}{x-8} = \frac{x-5}{x-8} + 3$
5. $\frac{8x-3}{x+3} - 2x = 4 - \frac{3x^2}{x+3}$
6. $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{4}{2x^2-2x}$
7. $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{x^2-75}{x^2+5x+6}$
8. $\frac{x-2}{3(x-1)} + \frac{x-1}{4(x-2)} = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$

5.4 Inéquations

Exercice 19

Résolvez dans \mathbb{R} les *inéquations* suivantes.

1. $x-1 > 0$
2. $2x-1 > 0$
3. $-x-1 > 0$
4. $-2x-1 > 0$
5. $x+1 > 0$
6. $2x+1 > 0$
7. $-x+1 > 0$
8. $-2x+1 > 0$
9. $x-3 \leq 0$
10. $2x-3 \leq 0$
11. $-x-3 \leq 0$
12. $-2x-3 \leq 0$
13. $x+3 \leq 0$
14. $2x+3 \leq 0$
15. $-x+3 \leq 0$
16. $-2x+3 \leq 0$

Exercice 20

Résoudre les *inéquations* suivantes.

1. $x^2 + 2x - 15 > 0$
2. $x^2 - 5x + 4 < 0$
3. $-2x^2 + 3x + 2 > 0$
4. $-3x^2 + 7x - 2 < 0$
5. $x^2 + 31x + 150 > 0$
6. $x^2 - 10 > 3x$
7. $-x^2 < x - 12$
8. $x^2 + 7 > 3x$
9. $x^2 < 8 - 7x$
10. $x^2 < 4$
11. $100 > x^2$
12. $x^2 > 3x$
13. $x(x+2) < 3x$
14. $3x(x-3) > 5(x-3)$
15. $(2-x)(4x-5) < 0$

Exercice 21

Résoudre les *inéquations* suivantes.

1. $\frac{x-3}{x+2} < 0$
2. $\frac{x+5}{5-x} > 0$
3. $\frac{3x+1}{3-x} \geq 0$
4. $\frac{1}{4x^2-x-3} < 0$
5. $\frac{2x+1}{x-3} \geq 1$
6. $\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{2}$
7. $\frac{2}{x-3} < \frac{1}{x}$
8. $\frac{x^2+1}{x^2-2x-3} > 0$
9. $\frac{x-1}{x^2-2x-8} < 0$